
Effiziente Simulation magnetischer Bauteile

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
Genehmigte Dissertation von Yves Hackl, M. Sc.
Tag der Einreichung: 01. Juli 2016, Tag der Prüfung: 12. Dezember 2016
Geburtsort: Dresden

Darmstadt 2017 — D 17

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Albert E. Ruehli



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Theorie
Elektromagnetischer
Felder

Effiziente Simulation magnetischer Bauteile

Genehmigte Dissertation von Yves Hackl, M. Sc.

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Albert E. Ruehli

Tag der Einreichung: 01. Juli 2016

Tag der Prüfung: 12. Dezember 2016

Darmstadt — D 17

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-58717

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/5871>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt.

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

tuprints@ulb.tu-darmstadt.de



Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung–Keine kommerzielle Nutzung–Keine Bearbeitung 4.0 International

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.de>

Kontakt: yhackl@phoenixcontact.com

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der effizienten numerischen Modellierung magnetischer, passiver Bauteile. Praktische Beispiele sind Drosseln oder Transformatoren, welche in unterschiedlichen Bauformen und Leistungsklassen in der heutigen Elektronik eingesetzt werden. Dafür wird eine bestehende Methode zur Simulation gekoppelter Luftspulen um die Berücksichtigung linearer, magnetischer Materialien erweitert, wobei die Flexibilität der Gitterstrukturen, die Effizienz der Algorithmen und die konsistente Herleitung der zu Grunde liegenden Gleichungen priorisiert werden. Die Effizienz ist grundsätzlich dadurch gewährleistet, dass die magnetischen Materialien ausschließlich auf Basis einer Oberflächendarstellung beschrieben sind, welche das physikalische Verhalten repräsentiert. Dieses ist aufgrund der Vernachlässigung der Welleneffekte, der Nichtlinearität und der Inhomogenität möglich und resultiert aus einer niederfrequenten Approximation der Maxwell'schen Gleichungen. Die entwickelte Methode für die Simulation der magnetischen Bauteile wird anhand akademischer sowie praktisch relevanter Beispiele evaluiert. Dabei wird unter anderem auf Konvergenzanalysen, Breitbandsimulationen und Vergleiche mit Messergebnissen eingegangen.

Die Arbeit beginnt mit der Wiederholung der Grundlagen der Elektrodynamik, wonach eine Einführung in die niederfrequenten Approximationen und die Herleitung der resultierenden Oberflächendarstellung an magnetischen Materialien folgt. Dabei ist Wert darauf gelegt, dass die Ausführungen konsistent durchgeführt sind und somit etwaige Abweichungen der Simulations- gegenüber den Messergebnissen erklärt und diskutiert werden können. Im Anschluss ist auf Basis der in dem vorherigen Kapitel hergeleiteten Darstellungen die neu eingeführte numerische Methode vorgestellt. Dazu werden die aus der Elektrodynamik resultierenden Gleichungen diskretisiert, effiziente Algorithmen und spezielle Gitterstrukturen vorgestellt. Abschließend ist die implementierte Methode anhand unterschiedlicher Beispiele evaluiert. Zum einen werden die Simulationsergebnisse mit Ergebnissen der Finite-Elemente-Methode (FEM) verglichen, wobei bemerkenswerte Geschwindigkeitsgewinne erzielt werden. Zum anderen werden anhand zwei praktisch relevanter magnetischer Bauteile die Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen, wobei die Übereinstimmungen im Rahmen der Fertigungstoleranzen liegen.



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Vorwort	3
2. Klassische Elektrodynamik	7
2.1. Die Maxwell'schen Gleichungen	7
2.2. Elektrisches Skalar- und magnetisches Vektorpotential	10
2.3. Green'sche Funktionen als Lösungen der Wellengleichungen	11
2.4. Integralgleichungen	13
2.5. Niederfrequente Näherungen der Maxwell'schen Gleichungen	14
2.5.1. Statische Näherungen	16
2.5.2. Klassische quasistatische Näherungen	16
2.5.3. Erweiterte Quasistatik	19
2.6. Eine Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien	22
2.6.1. Das magnetische Vektorpotential eines Magnetisierungsfelds	22
2.6.2. Herleitung einer Oberflächenintegralgleichung	25
2.6.3. Oberflächenintegralgleichung in der erweiterten Quasistatik	28
2.7. Zusammengefasste Darstellung und abschließende Bemerkungen	30
3. Die MagPEEC-Methode	33
3.1. Diskretisierung	34
3.2. Interpretation als äquivalentes Ersatzschaltbild	45
3.3. MagPEEC-Modelle als lineares Gleichungssystem	48
3.4. Anregung des Systems	51
3.5. Bestimmung der Torimpedanz	52
3.6. MNA Formulierung für die MagPEEC-Methode	53
3.7. Nicht-orthogonale MagPEEC-Formulierung	54
3.8. Assemblieren der Systemmatrix	59
3.9. Gitter der MagPEEC-Methode	74
3.10. Mehrfach zusammenhängende Gebiete und MagPEEC ⁰ -Methode	80
3.11. MQS-MagPEEC-Methode	83

4. Simulationsergebnisse und Messungen	85
4.1. Magnetische Kugel im homogenen Magnetfeld	85
4.1.1. Analytische Lösung	86
4.1.2. Lösung mittels der MagPEEC-Methode	87
4.1.3. Vergleich der Lösungen	89
4.1.4. Ergebnisse	90
4.2. Spule über einer Ferritplatte	93
4.2.1. Beschreibung des Beispiels	94
4.2.2. CST STUDIO SUITE®-Simulationen	96
4.2.3. MagPEEC-Simulationen	97
4.2.4. Simulationsergebnisse	98
4.3. Plattentransformator	105
4.3.1. Beschreibung des Bauteils	105
4.3.2. Simulationen und Messungen	108
4.3.3. Vergleich der Mess- und Simulationsergebnisse	112
4.4. Untersuchungen eines Ringkerns mit der MQS-MagPEEC ⁰ -Methode .	115
4.4.1. Vergleich gegenüber einem analytischen Ausdruck	116
4.4.2. Anwendung an einer stromkompensierten Drossel	119
5. Zusammenfassung und Ausblick	125
5.1. Beiträge dieser Arbeit	125
5.2. Ausblick	126
A. Geschlossene und teilanalytische Lösungen	129
A.1. Partielle Induktivität	129
A.2. Partieller Potentialkoeffizient	133
A.3. MagPEEC-Elemente	135
B. Ausgewählte Untersuchungen	139
B.1. Induktivität in Abhängigkeit vom Abstandsverhältnis	139
B.2. Vergleich der Nutzung verschiedener Quadraturen	140
Abkürzungen und Symbole	143
Abkürzungen	143
Generelle Symbole und Konventionen	145
Griechische Buchstaben	146
Römische Buchstaben	147
Danksagung	165





1 Einleitung

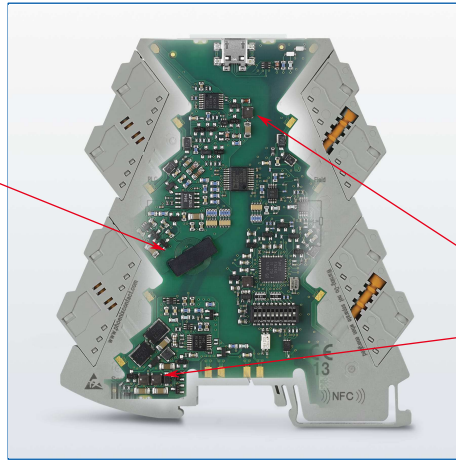
Die Miniaturisierung elektronischer Geräte schreitet fortwährend voran, wobei die Funktionalität trotz der Reduktion des zur Verfügung gestellten Raums erhalten bleiben soll. Ein Hauptbestandteil elektronischer Geräte sind passive Bauteile wie Widerstände, Kondensatoren und Transistoren und einige, welche die physikalischen Effekte magnetischer Materialien ausnutzen und bei denen die Miniaturisierung weitreichende Folgen hat. Beispielsweise ist der Grund für den Einsatz magnetischer Materialien bei Spulen mit magnetischem Kern die Erhöhung der magnetischen Energiespeicherkapazität des Bauteils. Hierbei ergibt sich bei einer Reduktion des Volumens des genutzten magnetischen Materials im Regelfall eine dementsprechende Reduktion der Induktivität. Um trotzdem die gewünschte Funktionalität zu gewährleisten und die Bauteile bis an die physikalischen Grenzen zu entwerfen, wird vermehrt auf den Einsatz der elektromagnetischen Feldsimulation zurückgegriffen. Dabei kann aus einer Vielzahl von Methoden zur numerischen Modellierung gewählt werden, wobei eine auf die Problemstellung angepasste effiziente Methode die gewünschten Resultate in einer vergleichsweise kurzen Zeit liefert.

Im Allgemeinen besteht die Klasse von passiven, magnetischen Bauteilen aus einer Vielzahl von unterschiedlichen Elementen. Dabei stellen Transformatoren, Drosseln oder Spulen mit magnetischem Kern einige Beispiele dar, welche oftmals in hoher Stückzahl innerhalb eines elektronischen Geräts zu finden sind. Exemplarisch ist in Abbildung 1.1 ein Trennverstärker für industrielle Anwendungen der Firma PHOENIX CONTACT Electronics GmbH dargestellt.

1.1 Motivation

Um mit der Miniaturisierung der Elektronik Schritt zu halten, werden die Methoden der numerischen Feldsimulation stetig weiterentwickelt und verbessert. Hierbei existieren grundsätzlich zwei unterschiedliche Ansätze zur Lösung der grundlegenden Gleichungen. Die erste Gruppe von Verfahren basiert auf der differentiellen Form der Maxwell'schen Gleichungen und ergibt lokale Lösungen in unterteilten Volumina oder Flächen, wobei das gesamte Berechnungsgebiet durch diese Unterteilung modelliert wird. Dadurch, dass jedes Volumenelement einem unterschiedlichen Material zugeordnet werden kann, sind diese Verfahren sehr flexibel und

Transformator



Spulen mit
Ferritkernen

Abbildung 1.1.: Beispielhafte Darstellung für die Miniaturisierung in der Elektronik und den Einsatz magnetischer Materialien anhand des MINI Analog Pro Trennverstärkers der Firma PHOENIX CONTACT Electronics GmbH [1].

können für einen weiten Bereich von Anwendungen eingesetzt werden. Ein Beispiel aus der beschriebenen Gruppe von numerischen Methoden zur Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) (vgl. [2]). Im Gegensatz dazu basiert die weitere Gruppe der Methoden auf der Integralform der Maxwell'schen Gleichungen. Mittels der Superposition der Elementarlösungen von Punktladungen und Stromsegmenten werden auf natürliche Weise offene Randbedingungen erfüllt und eine Diskretisierung des Freiraums umgangen. Exemplarisch seien hier die Momentenmethode (*engl. Method of Moments*) [3] und die Randelementmethode (*engl. Boundary Element Method*) [4] erwähnt. Im Allgemeinen wird die Wahl zwischen diesen Methoden anhand der Problemstellung vollzogen. Typischerweise sind die Methoden basierend auf der Integralform bei Anwendungen, bei denen der Anteil der Luft überwiegt, effizient, wohingegen der Einsatz von Methoden basierend auf der differenziellen Form flexibler ist. Gerade die Generalität der integralen Methoden hinsichtlich der Anisotropie oder der Nichtlinearität von Materialien ist nicht ohne Weiteres gewährleistet, wodurch die Anwendungen eingeschränkt sind.

Für Koppeleffekte von Verbindungsstrukturen wurde auf Basis der Arbeiten von A. E. Ruehli aus dem Jahre 1973 [5] eine spezielle Formulierung der Momentenmethode entwickelt. Diese nennt sich Methode der partiellen Elemente (*engl. Partial Element Equivalent Circuit Method – PEEC-Methode*) und überführt das elektro-

magnetische Feldproblem mittels einer Diskretisierung der aus den Maxwell'schen Gleichungen resultierenden Integralgleichungen mit konstanten Ansatzfunktionen konsistent in ein äquivalentes Netzwerkmodell aus passiven Elementen. Basierend auf den grundlegenden Arbeiten ist diese Methode in den letzten Jahrzehnten stetig weiterentwickelt worden, wobei die Behandlung komplexerer Gitter in [6] und unterschiedlicher Materialien in [7, 8] fokussiert wurde.

Die PEEC-Methode ist grundsätzlich geeignet für die effiziente Simulation gekoppelter Spulen im Freiraum, was in [9] ausführlich vorgestellt ist. Die in dieser Arbeit [9] entwickelte Software fungiert als Basis der vorliegenden Arbeit. Damit, wie einleitend beschrieben, Simulationen magnetischer Bauteile mit der Software basierend auf der PEEC-Methode durchgeführt werden können, wurde diese um die Behandlung magnetischer Materialien und der Nutzung flexibler Gitter erweitert, was auch schematisch in Abbildung 1.2 dargestellt ist. Im Detail ist entscheidend, dass die einleitend beschriebenen magnetischen Bauteile typischerweise im linearen Bereich betrieben werden und die resultierende relative Permeabilität frequenzabhängig und komplexwertig ist. Dabei entspricht der Realteil der magnetischen Wirkung und der Imaginärteil einer Zusammenfassung der makroskopischen Verluste innerhalb des magnetischen Materials. Die Ohm'schen Verluste in den leitfähigen Gebieten sind ebenfalls aufgrund der Skin- und Proximity-Effekte frequenzabhängig und werden durch Wahl spezieller flexibler Gitter beachtet. Alle vorgestellten Aspekte der Erweiterung der klassischen PEEC-Methode werden im Verlauf der vorliegenden Arbeit zusammengefasst als Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien (*engl. Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method* – MagPEEC-Methode) benannt, wobei diese auf einer konsistenten Argumentation der quasistatischen Näherung 1-ter und 2-ter Ordnung basiert.

Es sind eine Vielzahl von kommerziellen und nicht-kommerziellen Softwarepaketen basierend auf der PEEC-Methode verfügbar, wohingegen dem Autor aber keine PEEC-Software bekannt ist, welche die Berücksichtigung magnetischer Materialien in Verbindung mit flexiblen Gittern zulässt. Die hier entwickelten Methoden wurden implementiert und anhand von praktisch relevanten Beispielen im Vergleich zu anderen Simulationsmethoden und Messergebnissen evaluiert.

1.2 Vorwort

Im Folgenden wird die Struktur der vorliegenden Arbeit erläutert.

In Kapitel 2 werden die feldtheoretischen Grundlagen für die Herleitung der hier eingeführten MagPEEC-Methode vorgestellt. Nach Wiederholung der grundlegenden Maxwell'schen Gleichungen, der Einführung des elektrischen Skalar- und magnetischen Vektorpotentials, der Lösung der resultierenden partiellen Differenzi-

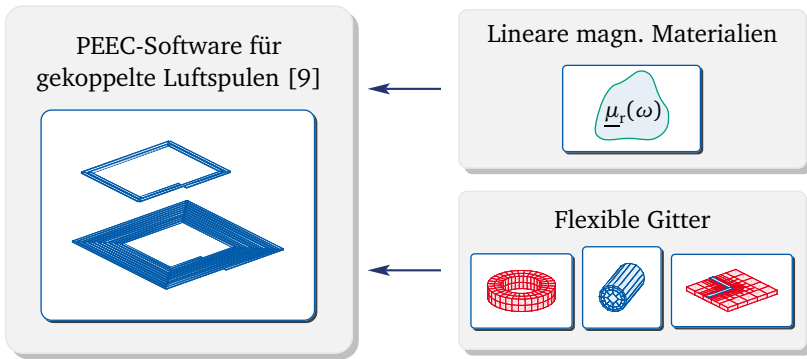



Abbildung 1.2.: Übersicht zu den in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Erweiterungen der bestehenden PEEC-Software aus [9].

gleichungen mittels der Green'schen Funktionen und dem Aufstellen unterschiedlicher Volumenintegraldarstellungen, wird auf ausgewählte Aspekte der quasistatischen Näherungen eingegangen. Dabei sind insbesondere die magnetoquasistatische und die quasistatischen Näherungen 2-ter Ordnung für die im weiteren Verlauf der Arbeit hergeleitete MagPEEC-Methode entscheidend, da auf Basis dieser Ausführungen eine Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien formuliert wird. Abschließend wird in dem Kapitel die gekoppelte Formulierung einer Oberflächen- und einer Volumenintegraldarstellung als Basis der MagPEEC-Methode als Ergebnis vorgestellt und diskutiert.

Die diskretisierten Gleichungen der MagPEEC-Methode werden in Kapitel 3 zu Beginn basierend auf den Ausführungen des vorherigen Kapitels auf orthogonalen Gittern hergeleitet, wonach spezielle Aspekte detailliert betrachtet sind. Dabei werden die Interpretation der Gleichungen als äquivalentes Ersatzschaltbild, die verschiedenen Möglichkeiten der Anregungen des Systems, die Erweiterung der Methode um nicht-orthogonale Zellgeometrien, das Assemblieren der Systemmatrix, die Gittergenerierung und die spezielle Betrachtung mehrfach zusammenhängender Gebiete vorgestellt. Es sei hier darauf hingewiesen, dass die MagPEEC-Methode in drei Variationen eingesetzt wird, welche im Verlauf dieses Kapitels ausführlich beschrieben sind. Es wird auf Basis der Magnetoquasistatik die MQS-MagPEEC-Methode, auf Basis der quasistatischen Näherungen 2-ter Ordnung die QS-MagPEEC-Methode und die MagPEEC⁰-Methode für geschlossene magnetische Materialien eingeführt.

In Kapitel 4 werden die eingeführten Methoden anhand von akademischen und



praktisch relevanten Beispielen evaluiert, wobei Konvergenzanalysen, Breitbandsimulationen und Vergleiche mit gemessenen Daten herangezogen werden.

Die vorliegende Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf Erweiterungsmöglichkeiten der eingeführten Methoden ab.



2 Klassische Elektrodynamik

In diesem Kapitel werden einige Aspekte der klassischen Elektrodynamik wiederholt, um in die Ausführungen der folgenden Kapitel einzuführen. Beginnend mit den Maxwell'schen Gleichungen, der Einführung des elektrischen Skalar- und magnetischen Vektorpotentials werden mittels der Lösungen der Wellengleichungen die Integralgleichungen hergeleitet, welche die Basis der in dieser Arbeit vorgestellten MagPEEC-Methode darstellen. Im weiteren Verlauf wird in die quasistatischen Näherungen eingeführt, womit sich eine integrale Formulierung auf den Oberflächen der magnetischen Materialien erschließt. Abschließend werden die Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefasst und diskutiert.

2.1 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen sind die Basis zur mathematischen Beschreibung von elektromagnetischen Feldern. Sie stellen das physikalische Verhalten vollständig dar und sind im Frequenzbereich durch

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}, \quad (2.1a) \quad \text{div } \underline{\vec{D}} = \underline{\rho}, \quad (2.1c)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}, \quad (2.1b) \quad \text{div } \underline{\vec{B}} = 0 \quad (2.1d)$$

definiert, wobei $\underline{\vec{J}}$ die Stromdichte aller freien Ströme, $\underline{\vec{E}}$ die elektrische Feldstärke, $\underline{\vec{D}}$ die elektrische Flussdichte, $\underline{\vec{B}}$ die magnetische Flussdichte und $\underline{\vec{H}}$ die magnetische Feldstärke ist. Die Kreisfrequenz ist als ω und die imaginäre Einheit als j definiert. Die komplexen Amplituden der beschriebenen Größen sind als unterstrichene Symbole dargestellt. Zur besseren Lesbarkeit sind die Abhängigkeiten der Felder zum Beispiel von dem Ortsvektor \vec{r} hier nicht aufgeführt.

Die vier in (2.1) gezeigten partiellen Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe des Satzes von Gauß und des Satzes von Stokes [10] in vier Integralgleichungen umformen. Im Frequenzbereich ist die sogenannte Integralform der Maxwell'schen Gleichungen durch

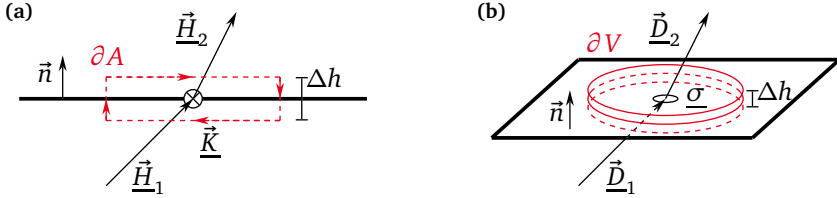


Abbildung 2.1.: Übersicht zu den Stetigkeitsbedingungen, welche in (2.3b) und (2.3c) definiert sind. (a) Stetigkeitsbedingung des magnetischen Felds \vec{H} . (b) Stetigkeitsbedingung der elektrischen Flussdichte \vec{D} .

$$\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_A j\omega \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (2.2a)$$

$$\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V \underline{\rho} dV, \quad (2.2c)$$

$$\int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A (\vec{J} + j\omega \vec{D}) \cdot d\vec{A}, \quad (2.2b)$$

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.2d)$$

gegeben, wobei ∂A die Randkurve der Fläche A und ∂V die Oberfläche des Volumens V darstellen. Die vektoriellen Flächen- und Streckenelemente $d\vec{A}$ und $d\vec{s}$ werden mit den Feldgrößen durch jeweilige Skalarprodukte verknüpft.

Das Auswerten der Integrale in (2.2) an Grenzschichten, was einer Grenzwertbildung der normal zu der Oberfläche stehenden Höhe $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h$ entspricht, lässt auf das Verhalten der einzelnen Feldgrößen an Grenzschichten schließen. Dabei kann die Änderung der Normalkomponente einer Feldgröße \vec{F} durch die Differenz des Grenzwerts der Feldgröße der einen Seite \vec{F}_1 gegenüber dem Grenzwert der Feldgröße an der zweiten Seite \vec{F}_2 im Skalarprodukt mit dem Oberflächennormalenvektor der Fläche \vec{n} und die Tangentialkomponente durch bilden des Kreuzprodukts der Differenz der beiden Felder mit

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} j\omega \vec{B} \Delta h, \quad (2.3a) \quad \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \underline{\rho} \Delta h, \quad (2.3c)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\vec{J} + j\omega \vec{D}) \Delta h, \quad (2.3b) \quad \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.3d)$$

ausgewertet werden. Die Grenzwerte der Quellterme auf der rechten Seite in (2.3) verschwinden im Allgemeinen nicht und können zu Unstetigkeiten einzelner Feldkomponenten an Grenzschichten führen. Aufgrund der Nichtexistenz von magnetischen Ladungen ist die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} hingegen immer stetig. Häufig werden die Unstetigkeiten oder Teile der Unstetigkeiten an den Grenzschichten als Oberflächenstromdichte $\vec{K} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{J} \Delta h$ bzw. Oberflächenladungsdichte $\underline{\sigma} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \underline{\rho} \Delta h$ interpretiert. Eine Darstellung

der Stetigkeitsbedingungen an den Grenzschichten sind exemplarisch für die magnetische Feldstärke $\underline{\vec{H}}$ und die elektrische Flussdichte $\underline{\vec{D}}$ in Abbildung 2.1 gegeben. Mittels der Materialbeziehungen

$$\underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{P}}, \quad (2.4a)$$

$$\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{H}} + \mu_0 \underline{\vec{M}} \quad (2.4b)$$

sind die Feld- und Flussgrößen gekoppelt, wobei $\underline{\vec{P}}$ die Polarisation, $\underline{\vec{M}}$ die Magnetisierung, ε_0 die Permittivität und μ_0 die Permeabilität des Vakuums darstellt. Die Hilfsfeldgrößen $\underline{\vec{P}}$ und $\underline{\vec{M}}$ beschreiben das makroskopische Verhalten von mikroskopischen Effekten innerhalb dielektrischer und magnetischer Materialien.

Die elektrische Stromdichte $\underline{\vec{J}}$ besteht aus der Summe aus der von den Feldgrößen unabhängigen eingepprägten Stromdichte $\underline{\vec{J}}_0$, der Konvektionsstromdichte $\underline{\vec{J}}^K = \underline{\rho} \underline{\vec{v}}$, welche die Bewegung freier Ladungen aufgrund der Coulomb- oder Lorentzkraft beschreibt, und der Leitungsstromdichte $\underline{\vec{J}}^C$. Die Leitungsstromdichte ist unter den Voraussetzungen eines linearen und isotropen elektrischen Leiters proportional zu der elektrischen Feldstärke, was durch das Ohm'sche Gesetz

$$\underline{\vec{J}}^C = \kappa \underline{\vec{E}} \quad (2.5)$$

mathematisch beschrieben ist. Hierbei entspricht κ der elektrischen Leitfähigkeit.

Für spezielle magnetische oder dielektrische Materialien, bei denen das makroskopische Verhalten linear und isotrop angenähert werden kann, werden die allgemeingültigen Materialbeziehungen aus (2.4) vereinfacht durch die linearen Zusammenhänge

$$\underline{\vec{D}} = \varepsilon_0 \underline{\vec{E}} + \varepsilon_0 (\underline{\varepsilon}_r - 1) \underline{\vec{E}} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \underline{\vec{E}}, \quad (2.6a)$$

$$\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{H}} + \mu_0 (\underline{\mu}_r - 1) \underline{\vec{H}} = \mu_0 \underline{\mu}_r \underline{\vec{H}} \quad (2.6b)$$

beschrieben, wobei $\underline{\varepsilon}_r$ die relative Permittivität und $\underline{\mu}_r$ die relative Permeabilität ist. Im Allgemeinen sind diese Hilfsgrößen komplexwertig. Dabei stellt der Realteil die elektrische oder magnetische Wirkung des Materials und der Imaginärteil eine makroskopische Zusammenfassung der Verluste innerhalb des Materials dar. Diese makroskopischen relativen Größen sind im Allgemeinen von vielen unterschiedlichen Parametern, wie dem Druck, der Temperatur oder der Frequenz abhängig.

2.2 Elektrisches Skalar- und magnetisches Vektorpotential

Um die Komplexität der Maxwell'schen Gleichungen in (2.1) zu reduzieren, werden Potentiale eingeführt, wobei typischerweise das magnetische Vektorpotential $\underline{\vec{A}}$ und das elektrische Skalarpotential $\underline{\Phi}$ definiert werden. Dazu ergeben sich zwei Gleichungen

$$\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{A}} - \text{grad}\underline{\Phi}, \quad (2.7a)$$

$$\underline{\vec{B}} = \text{rot}\underline{\vec{A}}, \quad (2.7b)$$

welche die Maxwell'schen Gleichungen (2.1a) und (2.1d) mittels der Vektoridentitäten $\text{div}\text{rot}\underline{\vec{F}} = 0$ und $\text{rot}\text{grad}\underline{\vec{F}} = 0$ implizit erfüllen. Durch das Einführen von (2.7) lassen sich die vier partiellen Differenzialgleichungen aus (2.1) zu zwei Gleichungen höherer Ordnung reduzieren.

Für das elektrische Skalarpotential in (2.7a) lässt sich nach beidseitigem Anwenden des Divergenz-Operators nacheinander (2.4a) und (2.1c) ersetzen, wohingegen für das magnetische Vektorpotential in (2.7b) sich nach beidseitigem Anwenden des Rotations-Operators und der Vektoridentität $\text{rot}\text{rot}\underline{\vec{F}} = \text{grad}\text{div}\underline{\vec{F}} - \Delta\underline{\vec{F}}$ (2.4b), (2.1b) und (2.7a) einsetzen lassen. Aus diesen Umformungen ergeben sich zwei über die eingeführten Potentiale gekoppelte Gleichungen

$$\Delta\underline{\Phi} + j\omega(\text{div}\underline{\vec{A}}) = -\frac{1}{\epsilon_0}(\underline{\rho} - \text{div}\underline{\vec{P}}), \quad (2.8a)$$

$$\Delta\underline{\vec{A}} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2}\underline{\vec{A}} - \text{grad}(\text{div}\underline{\vec{A}} + \frac{j\omega}{c_0^2}\underline{\Phi}) = -\mu_0(\underline{\vec{J}} + \text{rot}\underline{\vec{M}} + j\omega\underline{\vec{P}}), \quad (2.8b)$$

wobei $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und Δ dem Laplace-Operator entspricht.

Die Definition der Potentiale in (2.7) ist nicht eindeutig und die Divergenz des magnetischen Vektorpotentials kann frei gewählt werden. Dieses Verhalten nennt sich Eichfreiheit und lässt die sinnvolle Wahl dieser zu. Ein Ziel der typischerweise genutzten Eichungen ist das Entkoppeln von (2.8a) und (2.8b). Die Lorenz-Eichung

$$\text{div}\underline{\vec{A}} = -\frac{j\omega}{c_0^2}\underline{\Phi} \quad (2.9)$$

wird in (2.8) eingesetzt und es entsteht ein auf der linken Seite symmetrisches nur

noch durch die Lorenz-Eichung gekoppeltes System

$$\Delta \underline{\Phi} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2} \underline{\Phi} = -\frac{1}{\epsilon_0} (\underline{\rho} - \text{div} \underline{\vec{P}}), \quad (2.10a)$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} - \frac{(j\omega)^2}{c_0^2} \underline{\vec{A}} = -\mu_0 (\underline{\vec{J}} + \text{rot} \underline{\vec{M}} + j\omega \underline{\vec{P}}). \quad (2.10b)$$

Diese Gleichungen werden Helmholtz- oder Wellengleichungen genannt und die Wellenzahl ist mit $k = \omega/c_0$ definiert. Die Lorenz-Eichung in (2.9) und somit die Kopplung von (2.10a) und (2.10b) erfüllt in Verbindung mit (2.10) die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Dies ist durch beidseitiges Anwenden des Laplace-Operators auf (2.9), der Nutzung der Vektoridentität $\Delta \text{div} \underline{\vec{F}} = \text{div} \Delta \underline{\vec{F}}$, Einsetzen von (2.10) und nochmaliges Einsetzen von (2.9) zu prüfen. Somit ergibt sich als direkte Umformung der Lorenz-Eichung die Beziehung

$$\text{div} (\underline{\vec{J}} + \text{rot} \underline{\vec{M}} + j\omega \underline{\vec{P}}) + j\omega (\underline{\rho} - \text{div} \underline{\vec{P}}) = 0, \quad (2.11)$$

wobei sich durch Umsortieren von (2.11) und mittels der Vektoridentität $\text{div} \text{rot} \underline{\vec{F}} = 0$ erschließt, dass nur elektrische Stromdichten und Ladungsdichten der Kontinuitätsgleichung

$$\text{div} \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\rho} = 0 \quad (2.12)$$

unterliegen. Die Kontinuitätsgleichung für die Quellen, die aufgrund der eingeführten makroskopischen Hilfsfelder $\underline{\vec{P}}$ und $\underline{\vec{M}}$ entstehen, ist implizit erfüllt. Damit das entkoppelte System (2.10) die Maxwell'schen Gleichungen vollständig erfüllt, wird also im Folgenden entweder die Eichbedingung oder die Kontinuitätsgleichung mitgeführt.

2.3 Green'sche Funktionen als Lösungen der Wellengleichungen

Die Lösung der inhomogenen Wellengleichungen (2.10) für die Potentiale $\underline{\Phi}$ und $\underline{\vec{A}}$ in einem Aufpunkt \vec{r} ergibt sich aus einer Superposition verschiedener Fundamentallösungen im Freiraum, der sogenannten Green'schen Funktion. Die Green'sche Funktion ist im Frequenzbereich durch

$$\underline{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.13)$$

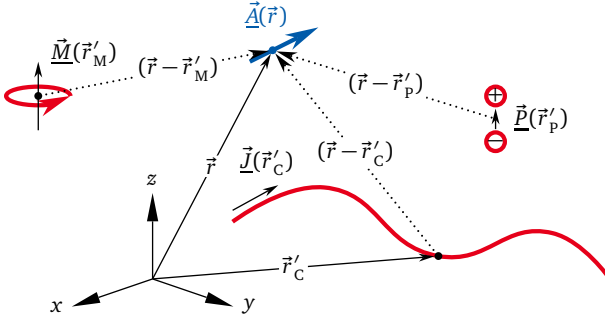


Abbildung 2.2.: Visualisierung der Lösung des magnetischen Vektorpotentials. Die Lösung ergibt sich aus einer Superposition mehrerer Quellen, wobei eine Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r}'_M)$, eine Leitungsstromdichte $\vec{J}(\vec{r}'_C)$ und eine Polarisation $\vec{P}(\vec{r}'_p)$ an verschiedenen Orten dargestellt sind.

gegeben und kann als Lösung der zu Grunde liegenden inhomogenen, linearen Differenzialgleichungen für Punktquellen betrachtet werden. Die Retardierung im Zeitbereich transformiert sich in einen Phasenversatz und somit in eine komplexwertige Funktion. Mittels der Green'schen Funktion (2.13) können die Lösungen der Potentiale als Integralgleichungen formuliert werden, wobei die Lösungen aller Quellen an verschiedenen Quellpunkten \vec{r}' superponieren

$$\underline{\Phi}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \underline{\rho}(\vec{r}') \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'_C) dV'}_{:= \underline{\Phi}^C(\vec{r})} - \underbrace{\frac{1}{\epsilon_0} \int_{V'} \vec{P}(\vec{r}'_p) \cdot \text{grad } \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'_p) dV'}_{:= \underline{\Phi}^P(\vec{r})}, \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}'_C) \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'_C) dV'}_{:= \vec{A}^C(\vec{r})} + \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}'_M) \times \text{grad } \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'_M) dV'}_{:= \vec{A}^M(\vec{r})} + \\ & + j\omega\mu_0 \underbrace{\int_{V'} \vec{P}(\vec{r}'_p) \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'_p) dV'}_{:= \vec{A}^P(\vec{r})}. \end{aligned} \quad (2.14b)$$

Dabei ist der Ort der unterschiedlichen Quellpunkte durch eine Tiefstellung eines Buchstabens, der die jeweilige Quelle bezeichnet, zu identifizieren. Der Gradient der Green'schen Funktion ergibt sich durch Anwenden der Produktregel zum Ab-

leiten und nochmaliges Einsetzen der Definition (2.13) zu

$$\text{grad}_{\vec{r}} \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} \left(jk + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \underline{G}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.15)$$

wobei $\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$ dem Einheitsvektor in $(\vec{r} - \vec{r}')$ -Richtung entspricht.

Die resultierenden Lösungen der Potentiale (2.14) sind als makroskopische Lösungen zu verstehen. Insbesondere die Dipolanteile $\underline{\Phi}^P(\vec{r})$ und $\underline{\vec{A}}^M(\vec{r})$ der Hilfsfelder, die aus den Quelltermen $-\text{div} \underline{\vec{P}}$ und $\text{rot} \underline{\vec{M}}$ aus (2.10) entstehen, sind im Volumen gemittelte Lösungen vieler einzelner Dipolmomente. Eine genaue Betrachtung der Herkunft dieser makroskopischen Lösungen der Helmholtzgleichungen ist nicht Thema der vorliegenden Arbeit und ist ausführlich in Lehrbüchern (z. B. [11]) behandelt.

Es wurden in (2.14) zur übersichtlichen Schreibweise folgende Abkürzungen der Potentialanteile in Abhängigkeit von ihrer Quelle eingeführt:

- $\underline{\Phi}^C(\vec{r})$ als elektrisches Skalarpotential freier Ladungen,
- $\underline{\vec{A}}^C(\vec{r})$ als magnetisches Vektorpotential freier Ströme,
- $\underline{\Phi}^P(\vec{r})$ als elektrisches Skalarpotential von dem Polarisationsfeld,
- $\underline{\vec{A}}^M(\vec{r})$ als magnetisches Vektorpotential von dem Magnetisierungsfeld und
- $\underline{\vec{A}}^P(\vec{r})$ als magnetisches Vektorpotential von dem Polarisationsfeld im Raum.

Eine Visualisierung der Überlagerung der drei unterschiedlichen Quellen als Beitrag zum magnetischen Vektorpotential ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

2.4 Integralgleichungen

Durch das Einsetzen der Lösungen der Potentiale (2.14) in ihre Definitionen (2.7) können zum einen aus bekannten Quellgrößen an den Orten \vec{r}' auf die elektromagnetischen Felder an den Orten \vec{r} geschlossen werden und zum anderen Integralgleichungen mit unbekannten Quellen konstruiert werden. Dazu sind die Felder im Aufpunkt $\underline{\vec{B}}(\vec{r})$ oder $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ in (2.7) durch ihre Materialbeziehungen ersetzt, wobei die Wahl dieser Materialbeziehungen abhängig von der Wahl der Aufpunkte ist. In linearen und isotropen leitfähigen Medien ($\kappa \gg 1$), gilt das Ohm'sche Gesetz (2.5), womit aus (2.7a)

$$0 = -\frac{\underline{\vec{j}}^C(\vec{r})}{\kappa(\vec{r})} - j\omega \underline{\vec{A}}(\vec{r}) - \text{grad} \underline{\Phi}(\vec{r}) \quad (2.16)$$

resultiert. Dabei sind die Lösungen der Potentiale aus (2.14), welche die eigentlichen integralen Ausdrücke der Integralgleichung darstellen, aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht eingesetzt. Diese Integralgleichung in (2.16) wird aufgrund der Abhängigkeit des elektrischen Skalarpotentials und des magnetischen Vektorpotentials MPIE (engl. *Mixed Potential Integral Equation*) oder auch EFIE (engl. *Electric Field Integral Equation*) genannt.

In magnetischen Materialien wird hingegen typischerweise die zweite Potentialgleichung (2.7b) in Verbindung mit der Materialbeziehung (2.4b) genutzt. Unter der Voraussetzung, dass das Material linear und isotrop ist, ergibt sich die sogenannte MFIE (engl. *Magnetic Field Integral Equation*) zu

$$0 = -\frac{\underline{\mu}_r}{\underline{\mu}_r - 1} \mu_0 \vec{\underline{M}}(\vec{r}) + \text{rot} \vec{\underline{A}}(\vec{r}), \quad (2.17)$$

wobei auch hier die integralen Ausdrücke durch das Einsetzen der Lösungen der Potentiale aus (2.14b) entstehen.

Es existieren eine Vielzahl von weiteren mehr oder weniger oft genutzten Formulierungen. Eine typische Gleichung, welche die erste Potentialgleichung (2.7a) in einem linearen und isotropen dielektrischen Medium auswertet, sei hier genannt. In Verbindung mit der linearen und isotropen Materialbeziehung aus (2.6a) ergibt sich für (2.7a)

$$0 = -\frac{\vec{\underline{P}}(\vec{r})}{\varepsilon_0(\underline{\varepsilon}_r - 1)} - j\omega \vec{\underline{A}}(\vec{r}) - \text{grad} \underline{\Phi}(\vec{r}) \quad (2.18)$$

zur Beschreibung der Polarisierung innerhalb eines dielektrischen Materials in Abhängigkeit von den Lösungen der Potentiale.

2.5 Niederfrequente Näherungen der Maxwell'schen Gleichungen

Für manche Anwendungen ist die Nutzung des vollständigen Satzes der Maxwell'schen Gleichungen aus (2.1) nicht notwendig und die Komplexität kann durch Näherungen verringert werden. Dadurch entsteht ein reduzierter Satz an grundlegenden Gleichungen, wodurch andere Lösungen der elektromagnetischen Felder bestimmt werden. Zum Beispiel vernachlässigt ein klassisches elektrisches Schaltbild Wellenphänomene und beschreibt somit nur ausgewählte physikalische Eigenschaften des Systems. Um genau zu identifizieren, welche Eigenschaften bei welcher Näherungslösung vernachlässigt werden, ist eine konsistente Betrachtung notwendig. Die Möglichkeiten sind hier vielfältig, wobei in diesem Kapitel vor al-

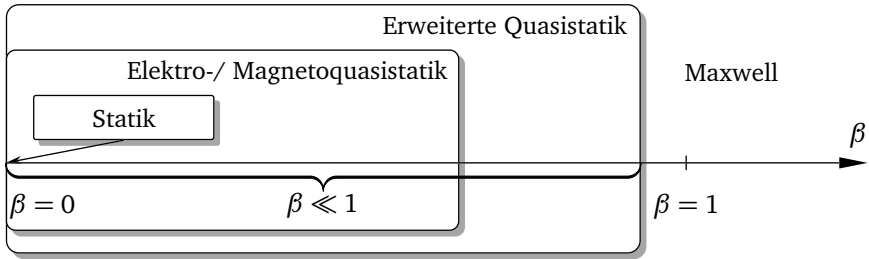


Abbildung 2.3.: Übersicht zu der Approximation der Maxwell'schen Gleichungen durch statische und quasistatische Näherungen in Abhängigkeit des Expansionskoeffizienten β . Der Koeffizient ist durch $\beta = L_{\text{char}}/\lambda_{\text{char}}$ nach (2.19) definiert und die hier beschriebenen Näherungen liegen in einem Bereich von $\beta \ll 1$.

lem auf die niederfrequenten – sogenannten quasistatischen Näherungen – eingegangen wird. Eine vollständige mathematische Beschreibung ist in [12] und ein physikalisch motivierter Zugang ist in [13, 14] zu finden.

Aufgrund dessen, dass zur Einteilung der Näherungen die Abmessungen und die Frequenz des Problems entscheidend sind, werden eine charakteristische Länge L_{char} und Wellenlänge λ_{char} definiert [12]. Mittels dieser Größen wird ein dimensionsloser Faktor

$$\beta = \frac{L_{\text{char}}}{\lambda_{\text{char}}} \quad (2.19)$$

im Freiraum bei der Vakuum Lichtgeschwindigkeit c_0 bestimmt, mit welchem sich die Maxwell'schen Gleichungen umschreiben lassen. Der Faktor β wird als Expansionskoeffizient für das Umformen der elektromagnetischen Felder in Taylorreihen genutzt. Abhängig davon, wann man diese Taylorreihen abbricht und die vollständigen Felder durch nur einige Glieder der Reihen approximiert, lassen sich unterschiedliche Näherungen einteilen. Bricht man die Reihen nach dem ersten Glied ab, entspricht das einer Näherung 0-ter Ordnung und der sogenannten Statik. Werden weitere Glieder genutzt, lassen sich die Elektroquasistatik (EQS) bzw. die Magnetoquasistatik (MQS) zu 1-ter und die erweiterte Quasistatik zu 2-ter Ordnung definieren [15], wobei alle hier beschriebenen statischen und quasistatischen Näherungen in dem Bereich $\beta \ll 1$ und somit $L_{\text{char}} \ll \lambda_{\text{char}}$ sind. Eine Übersicht der Einteilung der Näherungen ist Abbildung 2.3 zu entnehmen.

2.5.1 Statische Näherungen

Durch die Reduktion auf statische elektromagnetische Feder mit $\omega = 0$, was direkt $\beta = 0$ impliziert, ergibt sich ein reduzierter Satz der Maxwell'schen Gleichungen aus (2.1) zu

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.20a) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \varrho, \quad (2.20c)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (2.20b) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.20d)$$

wobei die elektrischen Felder beschrieben durch (2.20a) und (2.20c) und die magnetischen Felder beschrieben durch (2.20b) und (2.20d) vollständig entkoppelt sind. Diese können somit getrennt voneinander betrachtet werden und es ergibt sich die elektrostatische und magnetostatische Näherung. Darüber hinaus kann durch das Einführen der Leitungsströme mittels des Ohm'schen Gesetz aus (2.5) die Formulierung für das stationäre elektrische Strömungsfeld konstruiert werden.

2.5.2 Klassische quasistatische Näherungen

Bei der EQS- und MQS-Näherung resultiert im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.5.1 beschriebenen statischen Näherungen jeweils eine einseitige Kopplung der zu Grunde liegenden Gleichungen. Bei der EQS-Näherung hat die magnetische Flussdichte näherungsweise keinen Einfluss auf die Wirbel des elektrischen Felds $j\omega\vec{B} \approx 0$, wohingegen bei der MQS-Näherung die elektrische Flussdichte näherungsweise keinen Beitrag zu den Wirbeln des magnetischen Felds hat $j\omega\vec{D} \approx 0$. In der Praxis wird die EQS-Näherung bei Anwendungen, bei denen die elektrische Energie überwiegt, und die MQS-Näherung bei Anwendungen, bei denen die magnetische Energie überwiegt, eingesetzt, was eine Einteilung in kapazitive und induktive Anordnungen ermöglicht. Aufgrund dessen, dass alle in dieser Arbeit betrachteten Anwendungen induktive Systeme sind, wird im folgenden nur auf die MQS-Näherung näher eingegangen.

Um analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.2 den Satz der zur Verfügung stehenden Gleichungen zu reduzieren, werden Potentiale als Hilfsgrößen eingeführt. Durch das in Abschnitt 2.2 erläuterte elektrische Skalar- und magnetische Vektorpotential $\underline{\phi}$ und \underline{A} sowie ähnlichen mathematischen Umformungen ergeben sich in der

Magnetoquasistatik zwei nur einseitig gekoppelte Gleichungen

$$\Delta \underline{\Phi} + j\omega(\operatorname{div} \underline{\vec{A}}) = -\frac{1}{\epsilon_0}(\underline{\varrho} - \operatorname{div} \underline{\vec{P}}), \quad (2.21a)$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} - \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\vec{A}}) = -\mu_0(\underline{\vec{J}} + \operatorname{rot} \underline{\vec{M}}). \quad (2.21b)$$

Der entscheidende Unterschied, dass das elektrische Skalarpotential keinen Einfluss auf das magnetische Vektorpotential hat und somit (2.21b) per se von (2.21a) entkoppelt ist, ist im Vergleich von (2.8b) und (2.21b) ersichtlich. Weiterhin besteht jedoch eine einseitige Kopplung über die Divergenz des magnetischen Vektorpotentials. Durch die Einführung der Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \underline{\vec{A}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \underline{\vec{J}} = 0, \quad (2.22)$$

ergibt sich ein vollständig entkoppeltes System bestehend aus zwei Laplace-Gleichungen

$$\Delta \underline{\Phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}(\underline{\varrho} - \operatorname{div} \underline{\vec{P}}), \quad (2.23a)$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} = -\mu_0(\underline{\vec{J}} + \operatorname{rot} \underline{\vec{M}}). \quad (2.23b)$$

In (2.22) ist zusätzlich die Äquivalenz der Coulomb-Eichung mit einer im Gegensatz zu (2.12) modifizierten Kontinuitätsgleichung dargestellt, welche durch Anwenden des Laplace-Operators auf (2.22), Vertauschen des Divergenz- und Laplace-Operators und Einsetzen von (2.23) zu bestimmen ist. Im Gegensatz zu den Helmholtzgleichungen in (2.10) ist in (2.23) der Term, welcher für die Wellenausbreitung verantwortlich ist, verschwunden. Die Lösungen der Laplace-Gleichungen in (2.23) ist mit dem in Abschnitt 2.3 beschriebenen Ansatz der

Green'schen Funktionen im Freiraum zu

$$\underline{\Phi}_{\text{MQS}}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \underline{\rho}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\Phi}_{\text{MQS}}^{\text{C}}(\vec{r})} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \underline{\vec{P}}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \cdot \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\Phi}_{\text{MQS}}^{\text{P}}(\vec{r})}, \quad (2.24a)$$

$$\underline{\vec{A}}_{\text{MQS}}(\vec{r}) = \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \underline{\vec{J}}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\vec{A}}_{\text{MQS}}^{\text{C}}(\vec{r})} + \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \underline{\vec{M}}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \times \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\vec{A}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r})}, \quad (2.24b)$$

gegeben, wobei die Potentiale und die Quellen zur Unterscheidung den Index „MQS“ nutzen. Um Verwechslungen zu vermeiden, sind im Verlauf dieser Arbeit die komplexen Green'schen Funktionen als Fundamentallösung der Wellengleichung – wie in Abschnitt 2.3 eingeführt – als $\underline{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ definiert, wobei das hier resultierende quasistatische Gegenstück als Lösung der Laplace-Gleichungen mit

$$\widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.25)$$

und dem Gradienten der Green'schen Funktion mit

$$\text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \quad (2.26)$$

definiert ist und jeweils durch das Symbol \widehat{G} deklariert wird. Der Unterschied der Green'schen Funktionen in (2.25) und (2.13) ist das Fehlen des Retardationsterms mit der Ausbreitungskonstante $k = 2\pi/\lambda$, welcher eine Wellenausbreitung beschreibt. Wenn die Wellenlänge wesentlich größer als die Abmessung des Systems ($L_{\text{char}} \ll \lambda_{\text{char}}$) ist, dann ist der Retardationsterm $e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}$ näherungsweise eins und es ist deutlich, dass die Felder sich aufgrund der relativ zur Systemgröße hohen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit annähernd instantan ändern und statisch erscheinen.

Es ist hier zu erwähnen, dass durch die einseitige Kopplung bei der MQS-Näherung in (2.21) das elektrische Skalarpotential $\underline{\Phi}_{\text{MQS}}$ von vornherein keinen Beitrag zu der Laplace-Gleichung des magnetischen Vektorpotentials in (2.23b) leistet und somit ein getrenntes Lösen von (2.23b) möglich ist. In der Praxis

wird dieser Sachverhalt aufgrund der Reduzierung der Komplexität der Gleichungen häufig ausgenutzt, wobei die Betrachtung von (2.23b) in Verbindung mit der modifizierten Kontinuitätsgleichung (2.22) ausreicht.

2.5.3 Erweiterte Quasistatik

Die Approximationen der Maxwell'schen Gleichungen 2-ter Ordnung werden hier aufgrund der unterschiedlichen Ausführungen zusammengefasst als erweiterte Quasistatik oder kurz Quasistatik (QS) bezeichnet. Eine der bekanntesten Formulierungen wird Darwin-Modell genannt und geht auf den Autor einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1920 zurück [16]. Das übergeordnete Ziel der Nutzung dieser Approximation ist im Gegensatz zu den in Abschnitt 2.5.2 beschriebenen Näherungen 1-ter Ordnung das gleichzeitige Beachten von kapazitiven und induktiven Vorgängen¹. Diese Approximation basiert darauf, dass nur ein Teil der elektrischen Flussdichte einen Beitrag zu den Wirbeln des magnetischen Felds leistet und daher eine Näherung des Ampère'schen Gesetz in (2.1b) folgt [17, 18, 19]. Dazu gibt es verschiedene Zugänge. Zum einen kann ausschließlich die elektrische Flussdichte \vec{D} aufgeteilt werden und ein Anteil als Beitrag zu den Wirbeln des magnetischen Felds in (2.1b) vernachlässigt werden [19]. Dieser Ansatz wird in der Literatur typischerweise als Darwin-Modell bezeichnet. Zum anderen gibt es einen Zugang, der darüber hinaus auf einer Aufteilung der elektrischen Feldstärke basiert, woraus eine zusätzliche Approximation des Gauß'schen Gesetz in (2.1c) entsteht [9]. Dieser Ansatz wird im Folgenden weiter ausgeführt, da die resultierenden Lösungen der Potentiale im Gegensatz zu denen des Darwin-Modells weniger Quellterme aufweisen. Die elektrische Feldstärke aus (2.7a) wird in einen induzierten \vec{E}_i und quasistatischen Anteil \vec{E}_0 zerlegt

$$\vec{E} = \underbrace{-\text{grad } \Phi}_{:=\vec{E}_0} \underbrace{-j\omega\vec{A}}_{:=\vec{E}_i} \quad (2.27)$$

und der induzierte Anteil der elektrischen Flussdichte $\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i$ wird im Ampère'schen (2.1b) und im Gauß'schen Gesetz (2.1c) zu null approximiert [19]. Zu erwähnen sei hier, dass zwar die gesamte elektrische Flussdichte – bestehend aus induzierten und quasistatischen Anteil – existiert, aber nur der quasistatische Anteil tatsächlich aus einer Ladungsdichte hervorgeht und Wirbel des magnetischen Felds erzeugt. Der approximierte Satz der Maxwell'schen Gleichungen aus (2.1) ergibt

¹ Entscheidend ist das z. B. bei passiven Bauteilen, welche in Resonanz geraten.

sich damit zu

$$\text{rot } \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}, \quad (2.28a) \quad \text{div } \underline{\vec{D}}_0 = \underline{\varrho}, \quad (2.28c)$$

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega \underline{\vec{D}}_0, \quad (2.28b) \quad \text{div } \underline{\vec{B}} = 0, \quad (2.28d)$$

wobei auf den entscheidenden Unterschied zum Darwin-Modell in dem approximierten Gauß'schen Gesetz in (2.28c) hingewiesen ist. Mittels der Definition der Potentiale und ähnlichen mathematischen Umformungen, wie in Abschnitt 2.2 durchgeführt, ergeben sich zwei einseitig gekoppelte Gleichungen

$$\Delta \underline{\Phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}(\underline{\varrho} - \text{div } \underline{\vec{P}}), \quad (2.29a)$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} - \text{grad}(\text{div } \underline{\vec{A}} + \frac{j\omega}{c_0^2} \underline{\Phi}) = -\mu_0(\underline{\vec{J}} + \text{rot } \underline{\vec{M}} + j\omega \underline{\vec{P}}). \quad (2.29b)$$

Bei der Nutzung des Darwin-Modells entsteht auf der linken Seite in (2.29a) zusätzlich der Term $j\omega(\text{div } \underline{\vec{A}})$, welcher als zusätzliche Anregung wirken würde und hier durch die Nutzung des approximierten Gauß'schen Gesetzes in (2.28c) verschwindet.

Die Eichinvarianz, welche bei dem vollen Satz der Maxwell'schen Gleichungen immer besteht, ist bei diesen Approximationen nicht grundsätzlich gegeben, worauf auch in der Literatur [19] hingewiesen ist. Typischerweise wird bei dem Darwin-Modell die Coulomb-Eichung, welche in (2.22) dargestellt ist, genutzt, wodurch aber keine vollständige Entkopplung der Wellengleichungen entsteht [19, Gl. (24)]. Hingegen lassen sich die hier dargestellten Gleichungen in (2.29) durch die Lorenz-Eichung, welche in (2.9) definiert ist, entkoppeln. Aufgrund dessen wird diese Approximation um Verwechslungen mit dem Darwin-Modell zu vermeiden auch Lorenz-Quasistatik genannt [9]. Durch das Anwenden der Lorenz-Eichung auf (2.29) entstehen zwei ausschließlich über die Lorenz-Eichung gekoppelte Laplace-Gleichungen

$$\Delta \underline{\Phi} = -\frac{1}{\epsilon_0}(\underline{\varrho} - \text{div } \underline{\vec{P}}), \quad (2.30a)$$

$$\Delta \underline{\vec{A}} = -\mu_0(\underline{\vec{J}} + \text{rot } \underline{\vec{M}} + j\omega \underline{\vec{P}}). \quad (2.30b)$$

Aus Gründen der Vollständigkeit ist die Lorenz-Eichung und die äquivalente Konti-

nuitätsgleichung hier mit

$$\operatorname{div} \vec{\underline{A}} = -\frac{j\omega}{c_0^2} \underline{\Phi} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{\underline{J}} + j\omega \underline{\varrho} = 0, \quad (2.31)$$

wiederholt. Die Lösungen der Laplace-Gleichungen in (2.30) sind ähnlich zu den in Abschnitt 2.5.2 eingeführten magnetoquasistatischen Potentialen, wobei das magnetische Vektorpotential einen zusätzlich Term aufweist. Die Potentiale dieses quasistatischen Modells ergeben sich zu

$$\underline{\Phi}_{\text{QS}}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \underline{\varrho}_{\text{QS}}(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\Phi}_{\text{QS}}^{\text{C}}(\vec{r})} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \vec{\underline{P}}_{\text{QS}}(\vec{r}') \cdot \operatorname{grad} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \underline{\Phi}_{\text{QS}}^{\text{P}}(\vec{r})}, \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \vec{\underline{A}}_{\text{QS}}(\vec{r}) = & \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \vec{\underline{J}}_{\text{QS}}(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \vec{\underline{A}}_{\text{QS}}^{\text{C}}(\vec{r})} + \underbrace{\mu_0 \int_{V'} \vec{\underline{M}}_{\text{QS}}(\vec{r}') \times \operatorname{grad} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \vec{\underline{A}}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r})} + \\ & \underbrace{j\omega\mu_0 \int_{V'} \vec{\underline{P}}_{\text{QS}}(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \vec{\underline{A}}_{\text{QS}}^{\text{P}}(\vec{r})}, \end{aligned} \quad (2.32b)$$

wobei im Gegensatz zu den Ausführungen in (2.24) die Potentiale und die Quellen mit dem Index „QS“ beschrieben sind.

In der praktischen Anwendung werden diese Gleichungen häufig genutzt, da das selbe Ergebnis unter der trivialen Annahme, dass c_0 bei der Nutzung des Vollwellen-Ansatzes in (2.10) gegen unendlich strebt, resultiert. Dieser Satz an Gleichungen wird dadurch in der Literatur auch Quasistatik [20, 21] oder auch Elektro-Magneto-Quasistatik [22, 23] genannt. Dahingegen ist der Vorteil der detaillierten Behandlung der durchgeführten Näherungen ein tief greifendes Verständnis der zu Grunde liegenden Gleichungen, welche die Basis der in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Methode darstellt.

Über die beschriebenen Approximationen hinaus werden teilweise für die schnelle Bestimmung von Potentialen in Anwesenheit dielektrischer Materialien zusätzlich zu der induzierten elektrischen Feldstärke $\vec{\underline{E}}_{\text{i}}$ die sogenannte induzier-

te Polarisation zu null gesetzt, wodurch sich (2.28b) weiter zu

$$\text{rot } \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + j\omega\varepsilon_0 \underline{\vec{E}}_0 \quad (2.33)$$

vereinfacht. Damit verschwindet der zusätzliche Anteil an dem magnetischen Vektorpotential in dem letzten Summanden von (2.32b) und eine effiziente Bestimmung der Potentiale ist möglich.

2.6 Eine Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien

In (2.17) ist eine integrale Formulierung für das Verhalten der elektromagnetischen Felder in Anwesenheit eines magnetischen Materials dargestellt. Der Ansatz zur Herleitung basiert auf dem vollständigen Satz der Maxwell'schen Gleichungen in (2.1) mit der Einschränkung, dass das magnetische Material linear und isotrop ist. Durch die Einführung der quasistatischen Approximationen in Abschnitt 2.5 lässt sich eine ähnliche Formulierung auf der Oberfläche des magnetischen Materials konstruieren, welche für das in dieser Arbeit eingeführte numerische Verfahren den Vorteil einer Verringerung der Freiheitsgrade ergibt. Zu Beginn wird in Abschnitt 2.6.1 das magnetische Vektorpotential eines Magnetisierungsfelds in der Magnetoquasistatik $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ in einen Oberflächen- und Volumenanteil aufgeteilt und diskutiert, unter welchen Bedingungen der Volumenanteil verschwindet. Im Anschluss wird in Abschnitt 2.6.2 die Oberflächenintegralgleichung hergeleitet, was einer Auswertung des gesamten magnetischen Vektorpotentials an der Oberfläche der magnetischen Materialien entspricht. Abschließend sind in Abschnitt 2.6.3 die Änderungen diskutiert, welche durch die Nutzung der in Abschnitt 2.5.3 eingeführten erweiterten Quasistatik resultieren.

2.6.1 Das magnetische Vektorpotential eines Magnetisierungsfelds

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ eines Magnetisierungsfelds in der Magnetoquasistatik, welches in (2.24b) definiert ist, lässt sich in zwei Anteile aufteilen. Dies geschieht durch schrittweises Anwenden der Antikommunität des Kreuzprodukts, dem Zusammenhang der örtlichen Ableitungen der Green'schen Funktion² $\text{grad}_{\vec{r}} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\text{grad}_{\vec{r}'} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}')$, der Vektoridentität

² Die beiden hier genutzten örtlichen Ableitungen sind zu $\text{grad}_{\vec{r}} \Theta = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^{\text{T}} \Theta$ und $\text{grad}_{\vec{r}'} \Theta = (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z')^{\text{T}} \Theta$ definiert. Der Zusammenhang für die Green'sche Funktion $\text{grad}_{\vec{r}} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\text{grad}_{\vec{r}'} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}')$ lässt sich daher einfach herleiten. Im Folgenden wird auch analog $\text{rot}_{\vec{r}'}$ im Gegensatz zu $\text{rot}_{\vec{r}}$ genutzt.

$\text{rot}(\Theta \vec{F}) = \text{grad } \Theta \times \vec{F} + \Theta \text{rot } \vec{F}$ und dem Integralsatz $\int_V \text{rot } \vec{F} dV = \int_S \vec{n} \times \vec{F} dA$ und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{S'} [\vec{M}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \times \vec{n}(\vec{r}')] \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' + \\ + \mu_0 \int_{V'} [\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{M}_{\text{MQS}}(\vec{r}')] \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV', \quad (2.34) \end{aligned}$$

wobei $\vec{n}(\vec{r}')$ dem Flächennormalenvektor eines durch die Oberfläche S' begrenzten Volumens V' entspricht. In (2.34) ist ersichtlich, dass durch diese Umformungen eine Aufteilung des magnetischen Vektorpotentials in einen Oberflächenanteil als erster Summand der rechten Seite und einen Volumenanteil als zweiter Summand der rechten Seite resultiert. Ist ein Magnetisierungsfeld im dreidimensionalen Raum örtlich nicht begrenzt, so ergibt sich ein im Unendlichen liegender Oberflächenanteil, dessen Wirkung verschwindend gering ist. Ist das Magnetisierungsfeld jedoch örtlich begrenzt, so superponieren der Anteil auf der Oberfläche und der Anteil im Volumen dieses Gebiets zu dem magnetischen Vektorpotential. In der Literatur werden diese beiden Quellanteile, welche in eckigen Klammern in (2.34) dargestellt sind, als Magnetisierungsoberflächenstromdichte $\vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}')$ und Magnetisierungsvolumenstromdichte $\vec{J}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}')$ zu

$$\vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') = \vec{M}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \times \vec{n}(\vec{r}') \quad (2.35a)$$

$$\vec{J}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') = \text{rot}_{\vec{r}'} \vec{M}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \quad (2.35b)$$

definiert (vgl. [11]). Angemerkt sei hier, dass die durchgeführte Aufteilung des Potentials im Allgemeinen unabhängig von der gewählten Näherung gilt, aber aufgrund der folgenden Ausführungen hier eine Darstellung basierend auf der MQS-Näherung durchgeführt ist.

Im Folgenden ist vorgestellt, unter welchen Bedingungen der Volumenanteil des magnetischen Vektorpotentials verschwindet. Im Allgemeinen führt in dem zweiten Summanden der rechten Seite von (2.34) ein wirbelfreies Magnetisierungsfeld $\vec{M}_{\text{MQS}}(\vec{r}')$ zu einem Verschwinden des Volumenanteils $\vec{J}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}')$, wobei dieses aus einem homogenen Magnetisierungsfeld $\vec{M}_{\text{MQS}} \neq \vec{f}(\vec{r}')$ trivial resultiert. Darüber hinaus lässt sich jedoch auch für ein lineares und isotropes Material zeigen, dass die Wirbel der Magnetisierung verschwinden. Dazu wird die Magnetisierung mittels der linearen und isotropen Beziehung zu dem magnetischen Feld \vec{H}_{MQS} aus (2.6b) in der Definition der Magnetisierungsvolumenstromdichte in (2.35b) ersetzt

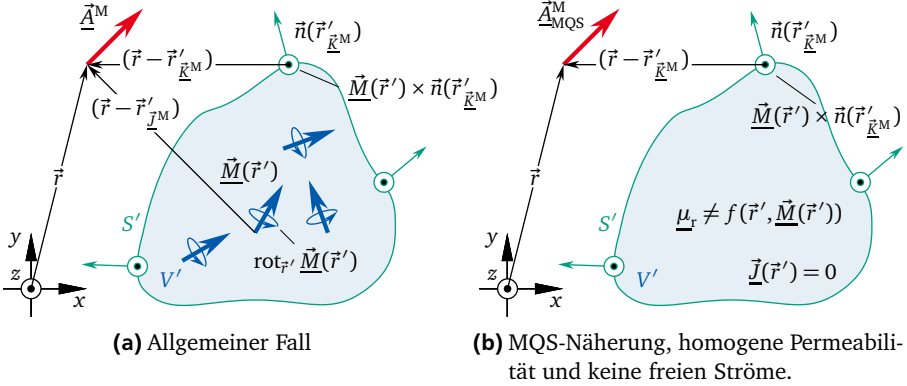


Abbildung 2.4.: Visualisierung der Aufteilung des magnetischen Vektorpotentials eines berandeten Gebiets mit einem Magnetisierungsfeld. (a) Darstellung einer Überlagerung des Oberflächenanteils $\vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ und eines Volumenanteils $\vec{J}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ nach (2.34). (b) Darstellung des Verschwindens des Volumenanteils bei der Nutzung der MQS-Näherungen in einem isotropen, linearen und homogenen magnetischen Material.

und die Vektoridentität $\text{rot}(\Theta \vec{F}) = \text{grad } \Theta \times \vec{F} + \Theta \text{rot } \vec{F}$ angewendet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') &= \text{rot}_{\vec{r}'} \left(\left[1 - \underline{\mu}_{\text{r}}(\vec{r}') \right] \vec{H}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \right) \\ &= \left[1 - \underline{\mu}_{\text{r}}(\vec{r}') \right] \text{rot}_{\vec{r}'} \vec{H}_{\text{MQS}}(\vec{r}') - \vec{H}_{\text{MQS}}(\vec{r}') \times \text{grad}_{\vec{r}'} \underline{\mu}_{\text{r}}(\vec{r}'), \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei eine ortsabhängige relative Permeabilität angenommen ist. Es ist in (2.36) deutlich, dass durch eine örtliche Änderung der relativen Permeabilität $\underline{\mu}_{\text{r}}$ durch den zweiten Summanden in (2.36) das Volumenintegral in (2.34) nicht null ist. Im Gegensatz dazu ergibt sich bei einer homogenen und damit ortsunabhängigen relativen Permeabilität $\underline{\mu}_{\text{r}} \neq f(\vec{r}')$ innerhalb von V' ein Verschwinden des zweiten Summanden in (2.36).

Durch das Ersetzen der Wirbel des magnetischen Felds im ersten Summanden in (2.36) mit dem in Abschnitt 2.5.2 eingeführten approximierten Zusammenhang des Ampère'schen Gesetz für die Magnetoquasistatik in Verbindung mit der Forderung $\vec{J}(\vec{r}') = 0$ innerhalb der Volumens V' verschwindet auch dieser. Somit ist zusammengefasst die Magnetisierungsvolumenstromdichte bei dem Ansatz der MQS-Näherung immer dann null, wenn eine ortsunabhängige relative Permeabilität vorliegt und keine freien Ströme innerhalb des magnetischen Materials zugelassen werden. Unter diesen Voraussetzungen ist eine Reduktion des magnetischen

Vektorpotentials in (2.34) auf nur einen integralen Oberflächenanteil möglich. In Abbildung 2.4 ist diese Reduktion dargestellt und durch

$$\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{S'} \vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' \quad (2.37)$$

abschließend bestimmt.

2.6.2 Herleitung einer Oberflächenintegralgleichung

Im Folgenden ist die Herleitung eines Zusammenhangs der in (2.35a) definierten Magnetisierungsflächenstromdichte und des magnetischen Vektorpotentials auf der Oberfläche eines begrenzten Gebiets gezeigt, wobei die MQS-Näherung genutzt und ein begrenztes Gebiet 1 mit einem Magnetisierungsfeld \vec{M}_1 in einem magnetisierungsfeldfreien Gebiet 2 angenommen ist. Die basierende Konfiguration ist in Abbildung 2.5 unter den Voraussetzungen der Stetigkeitsbedingungen aus (2.3) an der Grenzfläche zwischen den Gebieten visualisiert. Analog den Ausführungen in Abschnitt 2.1 auf Seite 8 sind die Stetigkeitsbedingungen im magnetoquasistatischen Fall herzuleiten. Durch Einsetzen von (2.4b) in die aus dem approximierten Ampère'schen Gesetz der Magnetoquasistatik resultierende Stetigkeitsbedingung ergibt sich

$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K} + \mu_0 \vec{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1). \quad (2.38)$$

Hierbei entspricht der Index „1“ dem Feld in Gebiet 1, der Index „2“ dem Feld im Gebiet 2 und \vec{K} , wie in Abschnitt 2.1 auf Seite 8 definiert, der Oberflächenstromdichte. Die Magnetisierung in Gebiet 2 ist per Definition null und der Zusammenhang der magnetischen Flussdichte mit dem magnetischen Feld ist $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2$. Somit folgt aus (2.38)

$$\vec{n} \times (\mu_0 \vec{H}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{K} - \mu_0 \vec{n} \times \vec{M}_1, \quad (2.39)$$

wobei die Tangentialkomponente des magnetischen Felds innerhalb des magnetischen Materials $\vec{n} \times \vec{H}_2$ durch die aus dem Ampère'schen Gesetz der MQS-Näherung resultierende Stetigkeitsbedingung ersetzt wird. Es resultiert

$$\vec{n} \times (\mu_0 \vec{H}_1 - \vec{B}_1) = -\mu_0 \vec{n} \times \vec{M}_1, \quad (2.40)$$

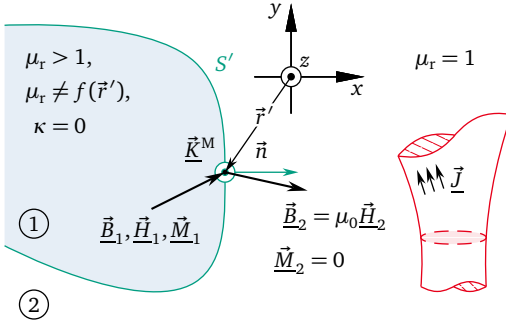


Abbildung 2.5.: Darstellung der Oberflächenintegralformulierung an magnetischen Materialien, welche aus den Stetigkeitsbedingungen auf der Oberfläche S' hergeleitet ist.

da sich die Unstetigkeiten an der Oberfläche in Form der Oberflächenstromdichte \vec{K} gegenseitig aufheben. Setzt man für das magnetische Feld im Inneren \vec{H}_1 die isotrope und lineare Formulierung aus (2.6b) an, so ergibt sich

$$0 = \frac{\mu_r}{1 - \mu_r} \mu_0 \underbrace{\vec{M}_1 \times \vec{n} + \vec{B}_1 \times \vec{n}}_{=\vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}} \quad (2.41)$$

als kompakter Zusammenhang auf der Oberfläche des Gebiets 1. Es sei hier erwähnt, dass $\mu_r \neq 1$ vorausgesetzt ist, da durch $(1 - \mu_r)$ dividiert wurde. Dieses ist aber hier implizit der Fall, da diese Gleichung nur bei der Existenz von magnetischen Material mit $\Re\{\mu_r\} > 1$ angesetzt wird. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich auch bei der Volumenintegralgleichung in (2.16), bei der durch die elektrische Leitfähigkeit $\kappa \neq 0$ dividiert wird. Die Ähnlichkeit des Ausdrucks auf der Oberfläche in (2.41) und des Ausdrucks in dem Volumen (2.17) ist deutlich, wohingegen hier die Feldgrößen durch das Kreuzprodukt mit dem Oberflächennormalenvektor ausschließlich auf der Oberfläche ausgewertet werden.

Die magnetische Flussdichte \vec{B}_1 an der Oberfläche des Materials in (2.41) resultiert aus den Wirbeln des gesamten magnetischen Vektorpotentials der MQS-Näherung \vec{A}_{MQS} , welches sich aus zwei Anteilen $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{C}}$ (2.24b) und $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ (2.37) zusammen setzt. Das magnetische Vektorpotential des Magnetisierungsfelds $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ besteht unter den in Abschnitt 2.6.1 beschriebenen Bedingungen ausschließlich aus

einem Oberflächenanteil und die Überlagerung stellt sich durch

$$\begin{aligned} \vec{B}_1(\vec{r}) = \mu_0 \int_{V'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \overbrace{\vec{J}_{\text{MQS}}(\vec{r}')}^{\text{=rot } \vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{C}}} dV' + \\ + \mu_0 \underbrace{\int_{S'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') dA'}_{\text{=rot } \vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

dar. Dabei sind die mathematischen Umformungen wie folgt durchgeführt: Der Rotations-Operator angewendet auf die Lösungen des magnetischen Vektorpotentials in (2.37) und auf den ersten Summanden in (2.24b) wird mit der Vektoridentität $\text{rot}(\Theta \vec{F}) = \text{grad } \Theta \times \vec{F} + \Theta \text{rot } \vec{F}$ aufgeteilt, wobei der jeweils zweite Summand resultierend aus der Vektoridentität verschwindet, da die Wirbel der Magnetisierungsflächenstromdichte und der freien Stromdichte null ergeben ($\text{rot}_{\vec{r}} \vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') = 0$ und $\text{rot}_{\vec{r}} \vec{J}_{\text{MQS}}(\vec{r}') = 0$).

Der zweite Summand auf der rechten Seite in (2.42) – resultierend aus dem Vektorpotential der Magnetisierung $\vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}$ – ist speziell für den Grenzwert auf der Oberfläche S' mit $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$ zu betrachten. Das Vektorpotential ist nicht stetig differenzierbar, denn die Tangentialkomponente der Wirbel des Vektorpotentials ändern beim Durchgang durch die Oberfläche sprunghaft ihren Wert, womit die Ableitung auf der Oberfläche nicht im klassischen Sinn existiert. Daher wird der Cauchy'sche Hauptwert der auftretenden Ableitungen des Potentials eingeführt, welcher mit dem rechts- und linksseitigen Grenzwert über die Sprungbeziehung

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}'} (\text{rot } \vec{A}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r})) = \mu_0 \left[\oint_{S'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') dA' + \frac{1}{2} \vec{n} \times \vec{K}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) \right] \quad (2.43)$$

verknüpft ist [24]. Dieses Verhalten der Ableitung auf der Oberfläche ist typisch für eine Vielzahl von Oberflächenintegraldarstellungen und detaillierte Beschreibungen sind der Literatur [25, 26, 27] zu entnehmen. Hier sei erwähnt, dass der resultierende Faktor $1/2$ ausschließlich für hinreichend glatte Oberflächen korrekt ist und z. B. an Ecken einen anderen Wert annimmt.

Das Ersetzen der gesamten magnetischen Flussdichte in (2.41) am Rand des magnetischen Materials mit den jeweiligen Anteilen aus (2.42) und (2.43) ergibt

somit als resultierende Integralgleichung

$$0 = \frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} \mu_0 \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) + \mu_0 \int_{V'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{\underline{J}}_{\text{MQS}}(\vec{r}') dV' \times \vec{n} + \\ + \mu_0 \int_{S'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}') dA' \times \vec{n} + \frac{\mu_0}{2} \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}), \quad (2.44)$$

wobei der letzte Summand von (2.44) mittels des doppelten Vektorprodukts [10, S. 190] durch

$$\vec{n} \times (\vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) \times \vec{n}) = \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{n}) - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r})) = \vec{\underline{K}}_{\text{MQS}}^{\text{M}}(\vec{r}) \quad (2.45)$$

aufgelöst ist. Dabei ergibt das Skalarprodukt zweier identischer Oberflächennormalenvektoren $\vec{n} \cdot \vec{n}$ die triviale Lösung eins und das Skalarprodukt des Oberflächennormalenvektors mit der Magnetisierungsflächenstromdichte null, da diese per Definition senkrecht zueinander stehen.

Das Resultat in (2.44) ist eine inhomogene Fredholm'sche Integralgleichungen [28], womit das Verhalten der magnetischen Felder an der Oberfläche von magnetischen Materialien beschrieben werden kann.

2.6.3 Oberflächenintegralgleichung in der erweiterten Quasistatik

Die diskutierten Herleitungen, welche in den beiden vorherigen Abschnitten für die Magnetoquasistatik durchgeführt worden sind, können ähnlich für das in Abschnitt 2.5.3 erweiterte Modell der Quasistatik ausgeführt werden. In diesem Abschnitt wird vor allem auf die Unterschiede eingegangen und diskutiert, worin die Folgen dieser Unterschiede liegen.

Bei der in Abschnitt 2.6.1 durchgeführten Aufteilung des magnetischen Vektorpotentials eines Magnetisierungsfelds ergibt sich bei der Nutzung der erweiterten quasistatischen Näherung im Gegensatz zu der MQS-Näherung auch unter den in Abschnitt 2.6.1 vorgestellten Einschränkungen ein weiterer Volumenanteil $\vec{\underline{A}}_{\text{QS,Vol}}^{\text{M}}$. Dieser resultiert direkt aus dem zusätzlichen Summanden in dem approximierten

Ampère'schen Gesetz der erweiterten Quasistatik (2.28b) und ergibt sich zu

$$\vec{A}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{S'} \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' + j\omega\mu_0 \underbrace{\left[1 - \underline{\mu}_r\right] \int_{V'} \vec{D}_0(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV'}_{:= \vec{A}_{\text{QS,Vol}}^{\text{M}}}, \quad (2.46)$$

wenn das magnetische Material linear, isotrop und homogen ist und keine freien Ströme innerhalb des magnetischen Materials zugelassen werden (vgl. Abschnitt 2.6.1). Der zusätzliche Volumenanteil $\vec{A}_{\text{QS,Vol}}^{\text{M}}$ entsteht durch die quasistatische elektrische Flussdichte \vec{D}_0 innerhalb magnetischer Materialien $\mu_r \neq 1$ und ist linear von der Frequenz ω abhängig.

Darüber hinaus ändert sich die in Abschnitt 2.6.2 hergeleitete Fredholm'sche Integralgleichung (2.44) zu

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} \mu_0 \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r}) + \mu_0 \int_{V'} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_{\text{QS}}(\vec{r}') dV' \times \vec{n} + \\ & + \mu_0 \oint_{S'} \text{grad } G(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r}') dA' \times \vec{n} + \frac{\mu_0}{2} \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r}) + \\ & + \text{rot} \left(\vec{A}_{\text{QS,Vol}}^{\text{M}} + \vec{A}_{\text{QS}}^{\text{P}} \right) \times \vec{n}, \quad (2.47) \end{aligned}$$

wobei der Unterschied im Gegensatz zu der Formulierung in der Magnetoquasistatik in (2.44) durch die letzten Summanden der rechten Seite in der dritten Zeile von (2.47) deutlich ist. Es ergeben sich in (2.47) zwei weitere Anteile an der gesamten magnetischen Flussdichte innerhalb des Materials.

Ein Anteil basiert auf der Wirkung eines Polarisationsfelds $\vec{A}_{\text{QS}}^{\text{P}}$. Zum einen verschwindet dieser Anteil, wenn kein Polarisationsfeld \vec{P} existiert und somit keine dielektrischen Materialien betrachtet werden und zum anderen ist in dem letzten Absatz in Abschnitt 2.5.3 auf Seite 22 erläutert, dass dieser Anteil verschwindet, wenn die zusätzliche Vernachlässigung der induzierten Polarisationsladung eingeführt wird.

Der weitere Anteil der elektrischen Flussdichte $\vec{A}_{\text{QS,Vol}}^{\text{M}}$ an der gesamten magnetischen Flussdichte ist im Allgemeinen nicht zu vernachlässigen. Praktische Anwendungen in Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3 zeigen jedoch, dass der Einfluss dieses Anteils gering ist und somit bei den in der vorliegenden Arbeit untersuchten Anwendungen vernachlässigt werden kann.

2.7 Zusammengefasste Darstellung und abschließende Bemerkungen

In diesem Abschnitt wird eine vollständige Beschreibung eines gekoppelten Systems – bestehenden aus leitfähigen und linearen, isotropen und homogenen magnetischen Gebieten – mittels einer Volumen- und Oberflächenintegralgleichung basierend auf der erweiterten Quasistatik als Ergebnis dieses Kapitels zusammenfassend beschrieben und diskutiert.

Das gekoppelte System ergibt sich aus den drei Gleichungen

$$\frac{\vec{J}_{QS}^C(\vec{r})}{\kappa(\vec{r})} + j\omega\vec{A}_{QS}(\vec{r}) + \text{grad}\Phi_{QS}(\vec{r}) = 0, \quad (2.48a)$$

$$\text{div}\vec{J}_{QS}^C(\vec{r}) + j\omega\underline{\rho}_{QS}^C(\vec{r}) = 0, \quad (2.48b)$$

$$\left(\frac{\mu_r}{1-\mu_r}\right)\mu_0\vec{K}_{QS}^M(\vec{r}) + \text{rot}\vec{A}_{QS}(\vec{r}) \times \vec{n}(\vec{r}) = 0, \quad (2.48c)$$

wobei (2.48a) und (2.48b) das Verhalten in den Volumina der leitfähigen Gebiete und (2.48c) das Verhalten an der Oberfläche der magnetischen Gebiete beschreibt. Es ist eingeschränkt, dass ausschließlich Stromdichten in leitfähigen Gebieten ($\kappa \gg 0$), in denen das Ohm'sche Gesetz gilt, als freie Stromdichten existieren, wodurch sich die Notation $\vec{J}^C = \vec{J}$ und $\underline{\rho}^C = \underline{\rho}$ ergibt. Das System (2.48) ist die Basis der in dieser Arbeit eingeführten MagPEEC-Methode, welche in Kapitel 3 vollständig hergeleitet wird. Es sei hier erwähnt, dass die klassische PEEC-Methode basierend auf Arbeiten von A. E. Ruehli [5] auf (2.48a) und (2.48b) beruht und die letzte Gleichung nicht berücksichtigt wird, da keine magnetischen Materialien beachtet werden. Um die Beschreibung zu vervollständigen, werden das elektrische Skalar- und das magnetische Vektorpotential durch

$$\Phi_{QS}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \underline{\rho}_{QS}^C(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV', \quad (2.49a)$$

$$\vec{A}_{QS}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{V'} \vec{J}_{QS}^C(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \mu_0 \int_{S'} \vec{K}_{QS}^M(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' \quad (2.49b)$$

dargestellt und die in (2.48c) genutzten Wirbel des magnetischen Vektorpotentials

auf den Oberflächen ergeben zu

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{A}_{\text{QS}}(\vec{r}) \times \vec{n} = & \frac{\mu_0 \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r})}{2} + \mu_0 \int_{V'} \text{grad} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{J}_{\text{QS}}^{\text{C}}(\vec{r}') dV' \times \vec{n} + \\ & + \mu_0 \int_{S'} \text{grad} \hat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{K}_{\text{QS}}^{\text{M}}(\vec{r}') dA' \times \vec{n}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Darüber hinaus wird hier zusammenfassend eine Liste der Eigenschaften vorgestellt, welche die Grenzen und Vorteile dieser gekoppelten Formulierung bestehend aus (2.48), (2.49) und (2.50) vorstellt.

- Das magnetische Material muss linear und isotrop sein.
- Das magnetische Material muss stückweise homogen sein.
- Es dürfen keine freien Stromdichten innerhalb des magnetischen Materials existieren.
- Der Einfluss dielektrischer Materialien muss gering sein.
- Es muss eine verschwindend geringe elektrische Flussdichte innerhalb des Materials existieren.
- Die quasistatische Näherung muss gültig sein.
- Es ist möglich, dispersives, magnetisches Material als komplexwertige, frequenzabhängige, relative Permeabilität zu modellieren.

Soll eine Formulierung mit keinen oder nur einem Teil der hier zusammengefassten Eigenschaften hergeleitet werden, wird typischerweise keine Oberflächen- sondern eine Volumenformulierung angesetzt. Dabei wird die MFIE aus (2.17) direkt mit der EFIE in (2.16) gekoppelt [29]. Dieses ist grundsätzlich mit dem kompletten Satz der Maxwell'schen Gleichungen möglich und ergibt weitreichende Möglichkeiten, wie zum Beispiel die Berücksichtigung nicht linearer Materialien [30, 31]. Dieses ist jedoch grundsätzlich nicht im Frequenzbereich möglich und erfordert eine Transformation der vorgestellten Gleichungen in den Zeitbereich.



3 Die MagPEEC-Methode

In diesem Kapitel wird die MagPEEC-Methode mittels der Ergebnisse der klassischen Elektrodynamik aus Kapitel 2 vorgestellt. Die klassische PEEC-Methode basiert auf Arbeiten von A. E. Ruehli aus den frühen 1970er Jahren [5, 32, 33], wodurch die elektromagnetischen Koppeffekte von Verbindungsstrukturen numerisch modelliert werden konnten. Motiviert ist diese Methode durch die Möglichkeit, die Zusammenhänge der klassischen Elektrodynamik als elektrische Ersatzschaltbilder darzustellen, die nur aus passiven Bauelementen, wie Widerstände, Induktivitäten oder Kapazitäten bestehen. Nachdem zu Beginn der 1990er Jahre die PEEC-Methode um dielektrische Materialien erweitert wurde [34], behandelten weitere Publikationen die Nutzung nicht-orthogonaler Zellen [6] und die Berücksichtigung magnetischer Materialien [8]. Die Erweiterung der PEEC-Formulierung – insbesondere hinsichtlich magnetischer Materialien – wurde seitdem mittels unterschiedlicher Ansätze weiter verfolgt, sodass im Folgenden einleitend zu diesem Kapitel eine Übersicht der publizierten Verfahren vorgestellt wird.

Grundsätzlich lässt sich die Wirkung magnetischer Materialien über eine analytisch aus der Geometrie bestimmte, effektive Permeabilität, ohne eine Diskretisierung der magnetischen Materialien durchzuführen, berücksichtigen [35, 36]. Dieses ist aber nur bei speziellen Aufgabenstellungen möglich und die Behandlung beliebiger Geometrien ist somit eingeschränkt. Andere Publikationen stellen eine Kopplung der PEEC-Methode mit der FEM vor [37], wobei aber ein Tetraedergitter des Freiraums benötigt wird und dadurch manche Vorteile der PEEC-Methode verloren gehen. Dem entgegen besteht eine grundsätzlich andere Möglichkeit darin, dass eine zusätzliche Integralgleichung einführt wird, welche das Verhalten der magnetischen Materialien beschreibt. Dabei wird typischerweise die MFIE (2.17) genutzt. Basierend auf dieser Idee lassen sich unterschiedliche Formulierungen finden, die hinsichtlich der zu diskretisierenden physikalischen Größe unterschieden werden können. Beispielsweise kann direkt die Magnetisierung \vec{M} diskretisiert werden, wobei sich zum einen für die Forderung einer konstanten Magnetisierung eine Oberflächenformulierung nach [8] finden lässt und sich zum anderen für eine beliebige Magnetisierung eine Diskretisierung des Volumens des magnetischen Materials ergibt. Dabei wurde sowohl auf die Nutzung linearer magnetischer Materialien [29, 31] als auch auf die Berücksichtigung nicht linearer Materialien [38] eingegangen. Andere Autoren bezeichnen diesen Ansatz auch als eine Kopplung mit der Methode der magnetischen Momente [39, 40], wohingegen die resultierenden Gleichungen teils geringfügig voneinander abweichen. Darüber

hinaus lässt sich basierend auf der MFIE die magnetische Flussdichte \vec{B} diskretisieren, was im Jahr 2015 vorgestellt wurde [41] und einen vielversprechenden Ansatz ergibt. Durch Oberflächenformulierungen an den magnetischen Materialien, wie sie auch in Kapitel 2 vorgestellt sind, können die von der Magnetisierung abgeleiteten Größen der Magnetisierungsoberflächenstromdichte oder der Magnetisierungsoberflächenladungsdichte diskretisiert werden. Bei der Diskretisierung der Magnetisierungsoberflächenladungsdichte und der anschließenden Kopplung mit der PEEC-Methode ergeben sich typischerweise keine allgemeingültigen Lösungen, was in den zugehörigen Publikationen auch diskutiert ist [42, 43, 44, 45], wohingegen eine Kopplung der PEEC-Methode mit der Magnetisierungsoberflächenstromdichte konsistent möglich ist und die Grundlagen dazu dem Kapitel 2 zu entnehmen sind. Zu diesem Thema haben Autoren Formulierungen in zwei Dimensionen vorgestellt [46, 47, 48, 49, 50], wobei in [49] die auch hier genutzte Benennung „MagPEEC-Methode“ eingeführt wurde. Dahingegen ist in [51, 52, 53] eine Formulierung mittels der Magnetisierungsoberflächenstromdichte in drei Dimensionen beschrieben.

Auf Basis der genannten Arbeiten werden im Verlauf der vorliegenden Arbeit einige neue Aspekte zu der MagPEEC-Methode hinzugefügt, eine konsistente Herleitung der diskretisierten Gleichungen durchgeführt und anhand von praktischen Beispielen in Kapitel 4 evaluiert. Dabei wird die Formulierung der Magnetisierungsoberflächenstromdichte angesetzt, da die Kopplung mit der klassischen PEEC-Methode über eine weitere Stromdichte konsistent möglich ist. Die Oberflächen der magnetischen Materialien werden mittels viereckigen Zellen diskretisiert, da zum einen für eine Formulierung für lineare magnetische Materialien eine Oberflächendiskretisierung ausreicht und zum anderen die viereckigen Zellen konform zu denen des Volumengitters der klassischen PEEC-Methode sind. Die MagPEEC-Methode wird aufgrund der Erhöhung der Komplexität der untersuchten Geometrien auf eine nicht-orthogonale Formulierung erweitert, welche auf den Arbeiten zu den nicht-orthogonalen Formulierungen der klassischen PEEC-Methode in [6] beruht.

Nachdem die Integralgleichungen basierend auf dem zusammengefassten Ergebnis des vorherigen Kapitels in Abschnitt 2.7 diskretisiert wurden, wird auf spezielle Aspekte der Implementierung eingegangen. Dabei werden unter anderem die Themen der nicht-orthogonalen MagPEEC-Methode, des Multifunktions-Ansatzes und die speziellen Algorithmen zum Erstellen der Gitter beschrieben.

3.1 Diskretisierung

Die Basis der klassischen PEEC-Methode ist die EFIE in leitfähigen Gebieten aus (2.16). Wie in Abschnitt 2.2 ausführlich behandelt, wird zusätzlich zu der Integralgleichung die Kontinuitätsgleichung (2.12) mitgeführt, damit eine vollständige

Beschreibung der zu Grunde liegenden Maxwell'schen Gleichungen bestimmt werden kann. Die folgenden Herleitungen des diskretisierten Systems sind konsistent zu den Ausführungen des vorherigen Kapitels im Frequenzbereich durchgeführt. Eine äquivalente Darstellung der Zusammenhänge im Zeitbereich ist für die klassische PEEC-Methode in [54] beschrieben, wohingegen eine Herleitung basierend auf einem Vollwellen-Ansatz in der Literatur z. B. in [9, 21, 7, 55] gefunden werden kann. Bei den folgenden Ausführungen werden die Näherungen der erweiterten Quasistatik, welche in Abschnitt 2.5.3 eingeführt worden ist, ausgenutzt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit der in Kapitel 2 eingeführte Index „QS“ der quasistatischen Lösungen der Potentiale, Stromdichten und Ladungen entfällt.

Der Einfluss linearer, isotroper, magnetischer Materialien auf die PEEC-Methode wird durch einen zusätzlichen Beitrag zu dem magnetischen Vektorpotential $\underline{\vec{A}}$ von der Magnetisierungsoberflächenstromdichte $\underline{\vec{K}}^M$ bestimmt. Die Magnetisierungsoberflächenstromdichte ist bei nicht permanent magnetisierten Materialien wiederum abhängig von dem gesamten magnetischen Vektorpotential $\underline{\vec{A}}$ im Raum, sodass sich ein vollständig gekoppeltes System ergibt. Der Zusammenhang des magnetischen Vektorpotentials und der Magnetisierungsoberflächenstromdichte ist durch eine in Abschnitt 2.6 hergeleitete Oberflächenintegralgleichung (2.44) beschrieben. In Abschnitt 2.7 wurde ausführlich behandelt, unter welchen Näherungen welche Anteile des magnetischen Vektorpotentials entfallen. Hier wird das Ergebnis dieser Ausführungen

$$\frac{\underline{\vec{J}}^C(\vec{r})}{\kappa(\vec{r})} + j\omega\underline{\vec{A}}(\vec{r}) + \text{grad}\underline{\Phi}(\vec{r}) = 0, \quad (3.1a)$$

$$\text{div}\underline{\vec{J}}^C(\vec{r}) + j\omega\underline{\rho}^C(\vec{r}) = 0, \quad (3.1b)$$

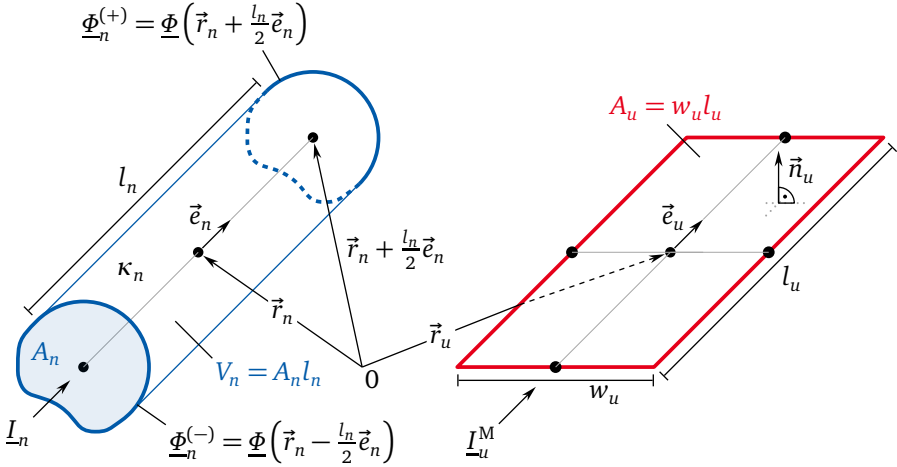
$$\frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} \mu_0 \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}) + \text{rot}\underline{\vec{A}}(\vec{r}) \times \vec{n}(\vec{r}) = 0, \quad (3.1c)$$

mit den zugehörigen Potentialen

$$\underline{\Phi}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V'} \underline{\rho}^C(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV', \quad (3.2a)$$

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{V'} \underline{\vec{J}}^C(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \mu_0 \int_{S'} \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' \quad (3.2b)$$

und den Wirbeln des magnetischen Vektorpotentials auf der Oberfläche magneti-



(a) Volumen-Stromzelle (blau)

(b) Magnetische Oberflächenzelle (rot)

Abbildung 3.1.: Darstellung der Basiszellen für die Diskretisierung des gekoppelten Systems (3.1) und (3.2). (a) Volumenzelle für die Diskretisierung der Leitungsstromdichte $\underline{\vec{J}}^c(\vec{r}_n)$ mit einer beliebigen aber konstanten Querschnittsfläche und einem Start- und Endpunkt. (b) Oberflächenzelle für die Diskretisierung der Magnetisierungsoberflächenstromdichte $\underline{\vec{K}}^M(\vec{r}_u)$ an magnetischen Materialien mittels eines orthogonalen Gitter.

scher Materialien

$$\begin{aligned} \text{rot} \underline{\vec{A}}(\vec{r}) \times \vec{n} &= \frac{\mu_0 \underline{\vec{K}}^M(\vec{r})}{2} + \mu_0 \int_{V'} \text{grad} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \underline{\vec{J}}^c(\vec{r}') dV' \times \vec{n} + \\ &+ \mu_0 \int_{S'} \text{grad} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}') dA' \times \vec{n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

als Basis des diskretisierten Systems wiederholt.

Um das System – bestehend aus (3.1), (3.2) und (3.3) – numerisch zu lösen, werden als Unbekannte die Leitungsstromdichte $\underline{\vec{J}}^c(\vec{r})$, die elektrische Volumenladungsdichte $\underline{\rho}^c(\vec{r})$ und die Magnetisierungsoberflächenstromdichte $\underline{\vec{K}}^M(\vec{r})$ gewählt. Die leitfähigen und magnetischen Volumina werden durch Volumen- und Oberflächenzellen diskretisiert, wobei in Abbildung 3.1 zum einen eine Volumenzelle mit beliebigem Querschnitt A_n für die Diskretisierung der Leitungsstromdichte

und zum anderen eine orthogonale und planare¹ Oberflächenzelle zur Diskretisierung der Magnetisierungsflächenstromdichte dargestellt ist. Das Volumen der n -ten Zelle für die Leitungsströme ergibt sich aus einem beliebigen Querschnitt A_n und einer festen Länge l_n , sowie der stückweise konstanten elektrischen Leitfähigkeit κ_n . Eine Fläche A_u einer einzelnen Oberflächenzelle ergibt sich aus dem Produkt der Länge l_u und der Weite w_u . Es ist zu beachten, dass pro Oberflächenzelle zwei orthogonal zueinander stehende Stromrichtungen definiert werden. Dahingegen wird für die Volumenzellen der Leitungsströme nur jeweils eine Stromrichtung angesetzt, da diese bei typischen Anwendungen elektrischer Leiter im Vorfeld bekannt ist. Ist dem nicht so, ist es auch möglich eine zwei- oder dreidimensionale Diskretisierung zu erstellen, worauf im Laufe der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen wird. Zusätzlich seien auch Ansätze, die Volumenelemente der Leitungsstromdichte als Tetraeder bzw. Dreiecke zu diskretisieren, erwähnt (vgl. [56, 57]). Es sei darauf hingewiesen, dass bei der Oberflächendiskretisierung diese Reduktion der Freiheitsgrade auch in Spezialfällen möglich ist, was in Abschnitt 4.4 anhand eines Beispiels gezeigt wird. Die Volumenzellen der elektrischen Ladungsdichten $\underline{\rho}^C(\vec{r})$ sind äquivalent zu den Stromzellen, wobei bei diesen keine Richtung existiert und somit ein skalarer Freiheitsgrad pro Volumenzelle entsteht.

Mittels der beschriebenen Zellen werden alle leitfähigen Gebiete in N_b Strom- und N_n Ladungszellen und alle Oberflächen der magnetischen Materialien in $2N_p$ Oberflächenzellen unterteilt². Die Anzahl der Oberflächenzellen N_p ist hier verdoppelt, da jeder Oberflächenzelle zwei orthogonal zueinander stehende Freiheitsgrade zugeordnet sind. Die Strom- und Ladungsdichten werden äquivalent zu dem Ansatz der klassischen PEEC-Methode nach [33] als stückweise konstant angenommen und hier um die Oberflächenströme erweitert, sodass die unbekannten Größen als eine Superposition von Leitungsströmen \underline{I}_n^C bzw. Magnetisierungsströ-

¹ Orthogonale Zellen sind durch die Nutzung von rechten Winkeln in allen Ecken definiert und beschreiben somit Spezialfälle von Volumen- und Oberflächenzellen. Im Gegensatz dazu werden nicht-orthogonale Zellen in Abschnitt 3.7 eingeführt. Planare Oberflächenzellen ergeben sich aus der Konstanz des Oberflächennormalenvektors \vec{n} über der gesamten Oberfläche.

² Die Indizes sind durch das später eingeführte Netzwerkmodell motiviert und es ergibt sich „b“ (von *engl. branches*, Zweige), „n“ (von *engl. nodes*, Knoten) und „p“ (von *engl. patches*, Fleck/Flicken).

men \underline{I}_u^M und elektrischer Ladungen \underline{Q}_q durch

$$\underline{J}^C(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N_b} \underline{I}_n^C \vec{m}_n(\vec{r}), \quad \vec{m}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{e}_n}{A_n}, & \vec{r} \in n\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$\underline{\varrho}^C(\vec{r}) = \sum_{q=1}^{N_b} \underline{Q}_q \nu_q(\vec{r}), \quad \nu_q(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{V_q}, & \vec{r} \in i\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.4b)$$

$$\underline{\vec{K}}^M(\vec{r}) = \sum_{u=1}^{2N_p} \underline{I}_u^M \vec{p}_u(\vec{r}), \quad \vec{p}_u(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\vec{e}_u}{w_u}, & \vec{r} \in u\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.4c)$$

definiert werden können. Die genutzten Basisfunktionen sind physikalisch motiviert und werden genutzt, um die resultierenden skalaren Größen als Ströme in Ampère und Spannungen in Volt darstellen zu können. Für eine formal durchgeführte Diskretisierung ist dieses nicht notwendig, wohingegen die Interpretation der diskretisierten Gleichungen als äquivalentes Ersatzschaltbild erst durch diese Wahl möglich ist. Die Anwendung dieses Verfahrens wird auch Methode der gewichteten Residuen genannt, wobei \vec{m}_n , ν_q und \vec{p}_u stückweise konstante Basisfunktionen und die skalaren Größen \underline{I}_n^C , \underline{Q}_q und \underline{I}_u^M die unbekannten Expansionskoeffizienten darstellen [58]. Zur Diskretisierung für die PEEC-Methode werden in der Literatur teilweise auch andere Basisfunktionen angesetzt, was z. B. in [54, 58, 59, 60] nachzulesen ist.

Damit ein lineares Gleichungssystem entsteht, werden die Gleichungen nach dem Einsetzen der Diskretisierung mit einem inneren Produkt getestet, welches für zwei beliebige Vektorfunktionen \vec{f}_a und \vec{f}_b zu

$$\langle \vec{f}_a(\vec{r}), \vec{f}_b(\vec{r}) \rangle = \int_V \vec{f}_a(\vec{r}) \cdot \vec{f}_b(\vec{r}) dV \quad (3.5)$$

definiert ist [3]. Wenn die Testfunktionen und die Basisfunktionen gleich sind, nennt man dieses Verfahren Galerkin-Methode. Für die PEEC-Methode und auch für die Diskretisierung gekoppelter Methoden werden in der Literatur teilweise Dirac-Delta-Distributionen verwendet (z. B. [61] für die PEEC und [42, 52] für gekoppelte Methoden mit magnetischen Materialien), wobei dieser Ansatz im Verlauf der vorliegenden Arbeit keine Anwendung findet.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden (3.1a) und (3.1b) im Folgenden getrennt von (3.1c) betrachtet, wobei die jeweiligen Potentiale aus (3.2) eingesetzt werden. Es entsteht somit eine Einteilung in die Diskretisierung der klassischen

PEEC-Methode mit zusätzlichen Anregungen aus einer Magnetisierungsflächenstromdichte und in die Diskretisierung der Oberflächenintegralgleichung für magnetische Materialien mit einer Anregung der Leitungsstromdichte.

PEEC-Methode mit Anregung der Magnetisierungsflächenstromdichte

In diesem Absatz wird die klassische PEEC-Diskretisierung, welche um die zusätzliche Anregung der Magnetisierungsflächenstromdichte erweitert wurde, vorgestellt. Dabei werden in (3.1a) und (3.1b), die Diskretisierungen aus (3.4) eingesetzt und die Potentiale durch die in (3.2) zusammengefassten Lösungen ersetzt. Es ergibt sich

$$\frac{1}{\kappa(\vec{r})} \sum_{n=1}^{N_b} I_n^C \vec{m}_n(\vec{r}) + j\omega \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } \Phi(\vec{r}) = 0, \quad (3.6a)$$

$$\text{div} \sum_{n=1}^{N_b} I_n^C \vec{m}_n(\vec{r}) + j\omega \sum_{q=1}^{N_n} Q_q \nu_q(\vec{r}) = 0 \quad (3.6b)$$

und

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{q=1}^{N_n} \frac{Q_q}{V_q} \int_{V'_q} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV', \quad (3.7a)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \sum_{n=1}^{N_b} \frac{I_n^C \vec{e}_n}{A_n} \int_{V'_n} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \mu_0 \sum_{u=1}^{2N_p} \frac{I_u^M \vec{e}_u}{w_u} \int_{S'_u} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA'. \quad (3.7b)$$

Bei der Anwendung der Galerkin-Methode werden Testfunktionen äquivalent den Diskretisierungen genutzt. Somit ergeben sich die inneren Produkte zu [9]

$$\langle \vec{f}(\vec{r}), \vec{m}_m(\vec{r}) \rangle = \int_{V_m} \frac{\vec{e}_m}{A_m} \cdot \vec{f}(\vec{r}) dV, \quad (3.8a)$$

$$\langle f(\vec{r}), \nu_i(\vec{r}) \rangle = \int_{V_i} \frac{1}{V_i} f(\vec{r}) dV, \quad (3.8b)$$

$$\langle f(\vec{r}), V_i \nu_i(\vec{r}) \rangle = \int_{V_i} f(\vec{r}) dV, \quad (3.8c)$$

wobei \vec{f} und f den Vektor- und Skalarfunktionen in (3.6) entsprechen. Die Wahl der unterschiedlichen Normierungen in (3.8) ist ähnlich der Wahl der Basisfunktionen in (3.4) durch das Ziel eines äquivalenten Ersatzschaltbilds motiviert. Durch das Anwenden von (3.8) auf (3.6) und (3.7) entsteht folgendes System von Gleichungen

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[\frac{l_m}{\kappa_m A_m} \right]}_{:=R_{mm}} \underline{I}_m + j\omega \sum_{n=1}^{N_b} \underbrace{\left[\mu_0 \frac{\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n}{A_m A_n} \int_{V_m} \int_{V'_n} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' dV \right]}_{:=L_{mn}} \underline{I}_n^C + \\ & + j\omega \sum_{u=1}^{2N_p} \underbrace{\left[\mu_0 \frac{\vec{e}_m \cdot \vec{e}_u}{A_m w_u} \int_{V_m} \int_{S'_u} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' dV \right]}_{:=L_{mu}^{\mu K}} \underline{I}_u^M + \frac{\vec{e}_m}{A_m} \cdot \int_{V_m} \text{grad } \underline{\Phi}(\vec{r}) dV = 0, \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\frac{1}{V_i} \int_{V_i} \underline{\Phi}(\vec{r}) dV = \sum_{q=1}^{N_n} \underbrace{\left[\frac{1}{\varepsilon_0 V_q V_i} \int_{V_i} \int_{V'_q} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' dV \right]}_{:=P_{iq}} \underline{Q}_q, \quad (3.9b)$$

$$\sum_{n=1}^{N_b} \underline{I}_n^C \int_{V_i} \text{div } \vec{m}_n(\vec{r}) dV + j\omega \underline{Q}_i = 0. \quad (3.9c)$$

Hierbei werden Abkürzungen der in eckigen Klammern dargestellten Ausdrücke, auf welche im Detail auf Seite 43 eingegangen wird, eingeführt. Der vierte Summand auf der linken Seite von (3.9a) lässt sich durch die Einschränkung, dass das elektrische Skalarpotential der m -ten Stromzelle unabhängig von der Querschnittsfläche der Start- und Endfläche ist, vereinfachen. Dieses impliziert die Reduktion der Potentiale von den Flächen auf Punkte, welche im Folgenden Knotenpotentiale genannt werden, und lässt sich durch folgende Umformung auf Basis des vierten Summanden der linken Seite von (3.9a) durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_m} \int_{V_m} \vec{e}_m \cdot \text{grad } \underline{\Phi}(\vec{r}) dV &= \int_{l_m} \text{grad } \underline{\Phi}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \\ &= \underline{\Phi}(\vec{r}_m + \frac{l_m}{2} \vec{e}_m) - \underline{\Phi}(\vec{r}_m - \frac{l_m}{2} \vec{e}_m) = \underline{\Phi}_m^{(+)} - \underline{\Phi}_m^{(-)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

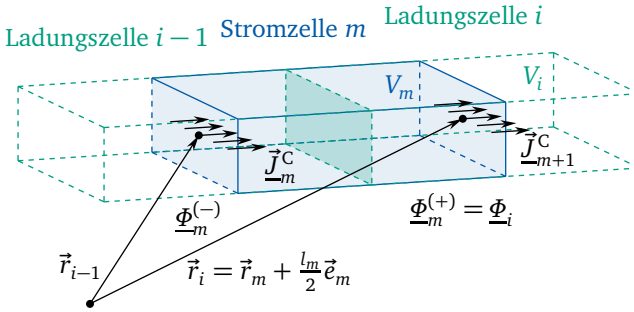


Abbildung 3.2.: Mittelung des Potentials zweier Ladungszellen des dualen Gitters auf die Knotenpotentiale als Start- und Endpunkt einer Stromzelle.

zeigen. Dabei entspricht $\underline{\Phi}^{(-)}$ dem Potential des Startknotens und $\underline{\Phi}^{(+)}$ dem Potential des Endknotens. Es resultiert somit ein Spannungsabfall als Potentialdifferenz über der Länge der n -ten Zelle, welcher schon in Abbildung 3.1 und hier in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Das Potential über das i -te Volumen der Ladungszelle ist vom Ansatz her konstant und ergibt somit für den Term der linken Seite von (3.9b) $V_i^{-1} \int \underline{\Phi}(\vec{r}) dV = \underline{\Phi}_i$. Damit diese gemittelten Potentiale genau zu den Start- und Endpunkten der Stromzellen und damit auf die eingeführten Knotenpotentiale passen, werden typischerweise duale Gitter verwendet, bei denen die Ladungszellen genau um die Hälfte der Länge der Stromzellen verschoben sind. Ist das Volumengitter der Stromzellen in der Länge nicht äquidistant unterteilt, werden hingegen zwei Ladungszellen als hintere und vordere Hälfte der beiden Stromzellen definiert, welche zusammen der Zelle des dualen Gitters entsprechen. Im Detail ist auf verzweigte Gitter in Abschnitt 3.3 eingegangen. Verdeutlicht ist dieses in der Abbildung 3.2, wo eine Stromzelle und zwei Ladungszellen des dualen Gitters dargestellt sind. Das Einführen eines dualen Gitters ist typisch bei der Diskretisierung der bei den Maxwell'schen Gleichungen auftretenden Differenzialoperatoren und wird bei verschiedenen Methoden ausgenutzt (z. B. die Methode der Finiten Integration [62]). Durch das Anwenden des Satzes von Gauß [10] für den ersten Summanden der linken Seite in (3.9c) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{N_b} I_n^C \int_{V_i} \text{div } \vec{m}_n(\vec{r}) dV = \sum_{n=1}^{N_b} I_n^C \int_{S_i} \vec{m}_n(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = \sum_{n=1}^{N_b} I_n^C \mathcal{A}_{ni}, \quad (3.11)$$

was die Umformung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral erlaubt, wobei die Summe aller ein- und austretenden Ströme dieses Oberflächenintegrals über das Volumen der Ladungszellen null ergibt. Durch die Wahl des dualen Gitters und somit der Orthogonalität der n -ten Ansatzfunktion mit dem i -ten Oberflächenele-

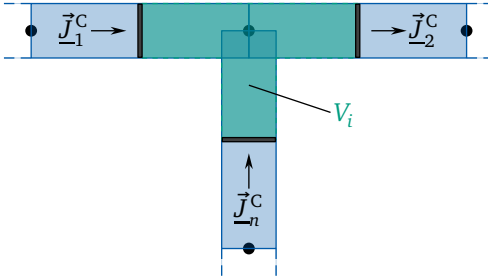


Abbildung 3.3.: Darstellung der diskretisierten Kontinuitätsgleichung in (3.9c). Das Oberflächenintegral in (3.11) ist nur an den schwarz dargestellten Rändern der i -ten in grün dargestellten Ladungszelle ungleich null und wird durch die Inzidenz \mathcal{A}_{ni} beschrieben.

ment ergibt sich der Wert dieses Integrals ausschließlich zu 1, -1 oder 0. Dieser Zusammenhang wird als Inzidenz eingeführt und lässt sich durch

$$\mathcal{A}_{ni} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der } n\text{-te Strom in die } i\text{-te Zelle eintritt,} \\ -1, & \text{wenn der } n\text{-te Strom aus der } i\text{-ten Zelle austritt,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.12)$$

beschreiben. Eine Visualisierung des Zusammenhangs in (3.11) und (3.12) ist in Abbildung 3.3 dargestellt. Eine direkte Konsequenz aus der Einführung dieser Inzidenz ist auch, dass die Potentialdifferenz durch $\underline{\Phi}^{(+)} - \underline{\Phi}^{(-)} = -\mathcal{A}_{in}\underline{\Phi}_i$ dargestellt werden kann, wenn ein konsistentes duales Gitter gewählt ist. Entspricht das gewählte duale Gitter nicht exakt dem Gitter der Stromzellen, so gilt dieses hingegen nicht im Allgemeinen. Der Grund für dieses Vorgehen und ein Verfahren, die Konsistenz der Gitter zu gewährleisten, ist in Abschnitt 3.3 beschrieben.

Mit den durchgeführten Vereinfachungen und Umformungen hinsichtlich des dualen Gitters lässt sich das System aus (3.9) kompakt durch

$$R_{mm}\underline{I}_m + j\omega \sum_{n=1}^{N_b} L_{mn}\underline{I}_n^C + j\omega \sum_{u=1}^{2N_p} L_{mu}^{\mu\kappa}\underline{I}_u^M + \underline{\Phi}_m^{(+)} - \underline{\Phi}_m^{(-)} = 0, \quad (3.13a)$$

$$\sum_{q=1}^{N_n} P_{iq}\underline{Q}_q = \underline{\Phi}_i, \quad (3.13b)$$

$$\sum_{n=1}^{N_b} \underline{I}_n^C \mathcal{A}_{ni} + j\omega \underline{Q}_i = 0 \quad (3.13c)$$

darstellen. Dabei sind die Definitionen der sogenannten partiellen Elemente R_{mm} ,

L_{mn} , $L_{mu}^{\mu\kappa}$ und P_{iq} für die in eckigen Klammern dargestellten Terme in (3.9a) und (3.9b) eingeführt. Die Namensgebung der partiellen Elemente geht auf A. E. Ruehli in [5, 32] zurück und definiert die integralen Ausdrücke für die später in Abschnitt 3.2 eingeführten passiven Netzwerkelemente. Wenn keine Oberflächenströme \underline{I}^M vorhanden sind, verschwindet der dritte Summand in (3.13a) und das System reduziert sich auf das klassische PEEC-System, welches in grundlegenden Arbeiten hergeleitet ist [9].

Oberflächenintegralgleichung der magnetischen Materialien

In diesem Absatz wird die Diskretisierung der Oberfläche der magnetischen Materialien mit der Beachtung der Anregung der vorher diskretisierten Leitungsstromdichten hergeleitet. Dazu wird basierend auf (3.1c) die Diskretisierung (3.4) eingesetzt und die Potentiale durch die Lösungen aus (3.2) und (3.3) ersetzt. Es ergibt sich

$$0 = \mu_0 \left(\frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} + \frac{1}{2} \right) \sum_{u=1}^{2N_p} \underline{I}_u^M \vec{p}_u(\vec{r}) + \mu_0 \sum_{n=1}^{N_b} \frac{\underline{I}_n^C}{A_n} \int_{V'_n} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_n dV' \times \vec{n}(\vec{r}) + \mu_0 \sum_{u=1}^{2N_p} \frac{\underline{I}_u^M}{w_u} \oint_{S'_u} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_u dA' \times \vec{n}(\vec{r}) \quad (3.14)$$

durch Ersetzen der Diskretisierung, wobei sich beim Einsetzen der Wirbel des magnetischen Vektorpotentials aus (3.3) der in Abschnitt 2.6.2 beschriebene Cauchy'sche Hauptwert durch den Term 1/2 im ersten Summanden von (3.14) wiederfindet. Hier sei wiederholend erwähnt, dass dieser Faktor nur für hinreichend glatte Oberflächen gültig ist. Äquivalent zu den Herleitungen zur PEEC-Methode im vorherigen Abschnitt ist hier die Galerkin-Methode mit folgendem inneren Produkt

$$\langle \vec{f}(\vec{r}), \vec{p}_v(\vec{r}) \rangle = \int_{S_v} \frac{\vec{e}_v}{w_v} \cdot \vec{f}(\vec{r}) dA \quad (3.15)$$

durchgeführt. Auch hier ist die Normierung der Testfunktion so gewählt, dass das Ergebnis der skalaren Unbekannten in einem Strom in Ampère resultiert. Durch

das Ansetzen des inneren Produkts (3.15) auf (3.14) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 = & \underbrace{\left[\mu_0 \left(\frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} + \frac{1}{2} \right) \frac{l_u}{w_u} \right]}_{:= T_{uu}^\mu} \underline{I}_u^M + \\
 & + \underbrace{\sum_{n=1}^{N_b} \left[\mu_0 \frac{1}{w_v A_n} \vec{e}_v \cdot \left\{ \int_{S_v} \left(\int_{V'_n} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_n dV' \right) \times \vec{n}_v \right\} dA \right]}_{:= T_{vn}^{\kappa\mu}} \underline{I}_n^C + \\
 & + \underbrace{\sum_{v=1}^{2N_p} \left[\mu_0 \frac{1}{w_v w_u} \vec{e}_v \cdot \left\{ \int_{S_v} \left(\oint_{S'_u} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_u dA' \right) \times \vec{n}_v \right\} dA \right]}_{:= T_{vu}^\mu} \underline{I}_u^M,
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

und die kompakte Schreibweise

$$0 = T_{uu}^\mu \underline{I}_u^M + \sum_{n=1}^{N_b} T_{vn}^{\kappa\mu} \underline{I}_n^C + \sum_{v=1}^{N_p} T_{vu}^\mu \underline{I}_u^M \tag{3.17}$$

durch die Einführung neuer partieller Elemente T_{uu}^μ , T_{uv}^μ und $T_{un}^{\kappa\mu}$ für die in eckigen Klammern dargestellten integralen Ausdrücke. Dabei entsprechen die jeweiligen Hochstellungen den Materialzugehörigkeiten des integralen Ausdrucks³. Es sei hier erwähnt, dass diese partiellen Elemente im Gegensatz zu den partiellen Elementen der klassischen PEEC-Methode nicht als passive Bauelemente identifiziert werden können und dementsprechend hier als Abkürzungen der integralen Ausdrücke zu verstehen sind. Die gemeinsame Nutzung von (3.13) und (3.17) ergibt ein gekoppeltes System, bei dem die Leitungsströme \underline{I}_u^C gleichzeitig Anregung der Magnetisierungsoberflächenströme \underline{I}_u^M sind und selbst wieder durch diese angeregt werden. Es ist somit im Regelfall nur eine gekoppelte Lösung aller Gleichungen aus (3.13) und (3.17) möglich, um das zu Grunde liegende Feldproblem vollständig zu

³ μ stellt dabei die Zusammenhänge innerhalb des magnetischen Materials und $\kappa\mu$ die Kopplung von Leitungsströmen in das magnetische Material dar. Konsistent ist die Benennung der in (3.13a) eingeführten induktiven Kopplung der Oberflächenströme zu den elektrischen Strömen gewählt.

beschreiben. Dieses System der diskretisierten Gleichungen ist die Basis der hier vorgestellten MagPEEC-Methode.

3.2 Interpretation als äquivalentes Ersatzschaltbild

Die Interpretation von feldtheoretischen Zusammenhängen als äquivalentes Ersatzschaltbild wird im Regelfall zum einen durch die Identifikation von passiven Elementen wie Widerständen, Induktivitäten oder Kapazitäten und zum anderen der Bestimmung der diskretisierten Gleichungen als Knoten- und Maschengleichungen, welche das erste und zweite Kirchhoff'schen Gesetz erfüllen, durchgeführt. Die Knotenregel besagt, dass in einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerks die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller abgehenden Ströme ist, wohingegen die Maschenregel besagt, dass sich alle Teilspannungen eines geschlossenen Pfads, was einer Masche entspricht, in einem elektrischen Netzwerk zu null addieren.

In der klassischen PEEC-Methode werden die eingeführten partiellen Elemente als passive Netzwerkelemente und stromgesteuerte Spannungsquellen, (3.13a) als Maschengleichung und (3.13c) als Knotengleichung interpretiert. Das resultierende Netzwerk aus partiellen Elementen für eine PEEC-Zelle ist in Abbildung 3.4c dargestellt. Dort wird deutlich, dass sich eine Masche mit der Verbindung zweier Ladungszellen mit den Start- und Endknoten einer Stromzelle, an denen jeweils die Knotengleichung aus (3.13c) erfüllt ist, ergibt. Die eingeführten partiellen Elemente und die dazugehörigen integralen Ausdrücke sind in Tabelle 3.1 aus Gründen der Übersichtlichkeit wiederholt. Für das Netzwerkmodell lassen sich die partiellen Elemente auch aufgrund der resultierenden Einheiten für die Eigeninduktivität L_{mm} und die Gegeninduktivitäten L_{mn} und $L_{mu}^{\mu K}$ in Henry als auch das Potential in 1/Farad als passive Bauteile interpretieren. Die nicht in der klassischen PEEC-Methode integrierte Kopplung der Magnetisierungsoberflächenströme in die Maschengleichung der PEEC-Gleichung durch den dritten Summanden in (3.13a) ist als Gegeninduktivität und somit als weitere stromgesteuerte Spannungsquellen in Abbildung 3.4b rot dargestellt.

Die Interpretation der diskretisierten Oberflächenintegralgleichung in (3.17) in Form eines äquivalenten Ersatzschaltbilds ist nicht ohne Weiteres möglich, da keine Knotengleichung explizit gegeben ist. Der Grund dafür ist, wie in Abschnitt 2.2 ausführlich behandelt, dass die Kontinuitätsgleichung, die bei der PEEC-Methode zu der als Knotengleichung interpretierten Gleichung (3.13c) resultiert, implizit erfüllt ist und nicht mitgeführt werden muss. Damit existiert für die Oberflächenströme keine Knotengleichung und eine Darstellung durch ein äquivalentes Ersatzschaltbild ist nicht möglich. Es ist jedoch zu beachten, dass die Oberflächenströme durch

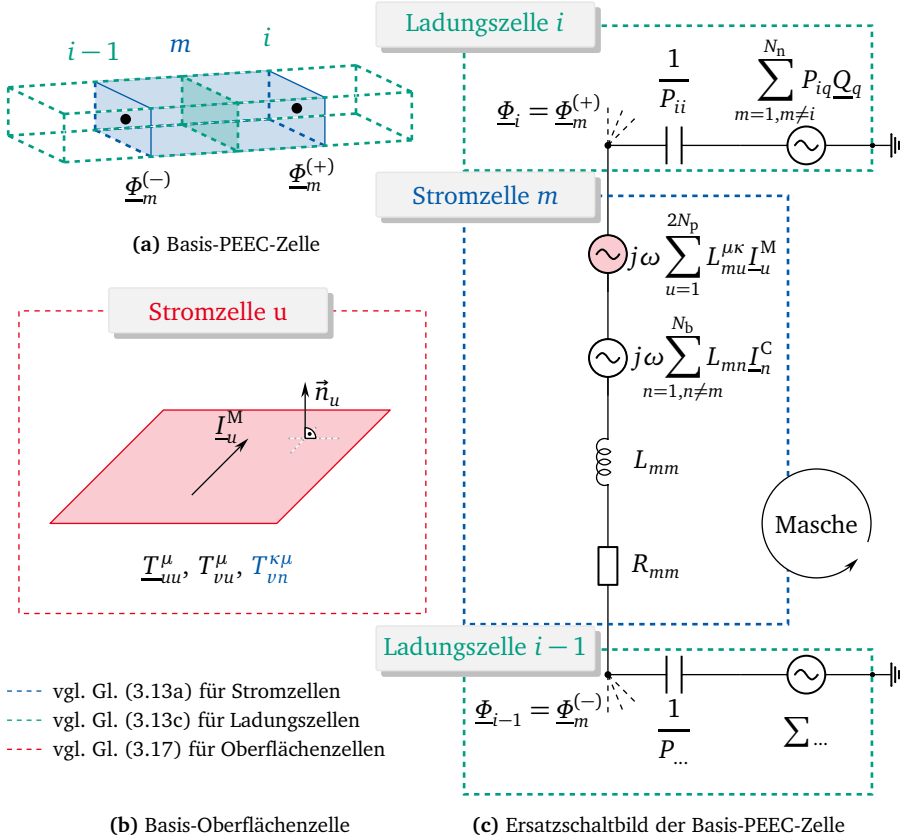


Abbildung 3.4.: Darstellung der MagPEEC-Gleichungen aus (3.13) und (3.17) als äquivalentes Ersatzschaltbild. (a) Darstellung der Geometrie der Basis-PEEC-Zelle. (b) Visualisierung der u -ten Oberflächenzelle. (c) Darstellung der m -ten Stromzelle verbunden mit der i -ten und $(i - 1)$ -ten Ladungszelle als äquivalentes Ersatzschaltbild. Die Kopplungen der Gleichungen sind jeweils farbig dargestellt, sodass die Einkopplung der Oberflächenströme in die m -te Stromzelle in (c) rot und die Einkopplung der Leitungsströme in die Oberflächenzellen in (b) blau hervorgehoben ist.

Tabelle 3.1.: Übersicht über die partiellen Elemente der MagPEEC-Methode bei orthogonaler Diskretisierung.

Partielle Elemente	Integraler Ausdruck
Widerstand	$R_{mm} = \frac{l_m}{\kappa_m A_m}$
Induktivität	$L_{mn} = \mu_0 \frac{\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n}{A_n A_m} \int_{V_m} \int_{V'_n} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' dV$ $L_{mu}^{\mu\kappa} = \mu_0 \frac{\vec{e}_m \cdot \vec{e}_u}{w_u A_m} \int_{V_m} \int_{S'_u} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' dV$
Potential	$P_{iq} = \frac{1}{\varepsilon_0 V_q V_i} \int_{V_i} \int_{V'_q} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' dV$
MagPEEC	$\underline{T}_{uu}^{\mu} = \mu_0 \left(\frac{\mu_r}{1 - \mu_r} + \frac{1}{2} \right) \frac{l_u}{w_u}$ $T_{vu}^{\mu} = \frac{\mu_0}{w_v w_u} \vec{e}_v \cdot \left\{ \int_{S_v} \left(\oint_{S'_u} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_u dA' \right) \times \vec{n}_v \right\} dA$ $T_{vn}^{\kappa\mu} = \frac{\mu_0}{w_v A_n} \vec{e}_v \cdot \left\{ \int_{S_v} \left(\int_{V'_n} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_n dV' \right) \times \vec{n}_v \right\} dA$

das implizite Erfüllen der Kontinuitätsgleichung auf der Oberfläche divergenzfrei sind, aber nicht von Knoten ab oder hinein führen. Die partiellen Elemente der Oberflächenintegraldarstellung \underline{T}_{uu}^{μ} , T_{vu}^{μ} und $T_{nu}^{\kappa\mu}$ sind im Gegensatz zu den partiellen Elementen der klassischen PEEC-Methode einheitenlos und können somit nicht als passive Bauelemente dargestellt werden. Die Namensgebung „partielles Element“, welche hier für die integralen Anteile der Gleichung (3.17) eingeführt ist, ist somit nicht konsistent. Eingeführt ist diese dennoch, damit eine einheitliche Benennung aller genutzten integralen Ausdrücke in der MagPEEC-Methode, wie in Tabelle 3.1 durchgeführt, möglich ist. Visualisiert ist die Oberflächenzelle in Abbildung 3.4b, wobei die Kopplung von der PEEC-Stromzelle in die Gleichung der Oberflächenzelle blau dargestellt ist.

Grundsätzlich ist somit die Beschreibung des vollständig gekoppelten elektromagnetischen Feldproblems als äquivalentes Ersatzschaltbild nicht möglich. In weiteren Ausführungen in Abschnitt 3.6 ist diskutiert, wie dennoch dieses Verhal-

ten umgangen und das gekoppelte System mit klassischen Schaltungssimulatoren (z. B. SPICE) gelöst werden kann. Vorerst wird hingegen im folgenden Abschnitt die Interpretation der Gleichungen als lineares Gleichungssystem präsentiert.

3.3 MagPEEC-Modelle als lineares Gleichungssystem

Um das resultierende gekoppelte System aus (3.13) und (3.17) auf eine beliebige Anzahl von Zellen zu erweitern, ist es nötig, dieses in eine Matrixschreibweise zu überführen. Dabei ist unter anderem die Beschreibung mit beliebig verzweigten Kanten, welche mit einer beliebigen Anzahl von Knoten verbunden sind, möglich. Durchgängig für die vorliegende Arbeit ist die folgende Notation, dass Matrizen als große fettgedruckte Buchstaben und Vektoren als kleine fettgedruckte Buchstaben definiert sind, gewählt. Das gekoppelte System ergibt sich somit zu

$$(\mathbf{R} + j\omega\mathbf{L})\mathbf{i}_b - \mathbf{A}\underline{\varphi}_n + j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa}\mathbf{i}_p = \mathbf{0}, \quad (3.18a)$$

$$\mathbf{P}_d\mathbf{q}_d = \underline{\varphi}_d, \quad (3.18b)$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{i}_b + j\omega\mathbf{q}_n = \mathbf{0}, \quad (3.18c)$$

$$\mathbf{T}_{\kappa\mu}\mathbf{i}_b + \mathbf{T}_{\mu}\mathbf{i}_p = \mathbf{0}, \quad (3.18d)$$

wobei \mathbf{R} die $N_b \times N_b$ Diagonalmatrix der partiellen Widerstände, \mathbf{L} die $N_b \times N_b$ vollbesetzte Matrix der partiellen Induktivitäten, \mathbf{P}_d die $N_d \times N_d$ vollbesetzte Matrix der partiellen Potentialkoeffizienten und \mathbf{A} die $N_b \times N_n$ ausschließlich mit 1, -1 oder 0 besetzte Inzidenzmatrix ist. Mit dem Vernachlässigen der weiteren Summanden in (3.18) ergibt sich zusammen mit dem $N_b \times 1$ Vektor der Zweigströme \mathbf{i}_b , den $N_n \times 1$ bzw. $N_d \times 1$ Vektoren der Ladungen \mathbf{q}_n bzw. \mathbf{q}_d und den $N_n \times 1$ bzw. $N_d \times 1$ Vektoren der Knotenpotentiale $\underline{\varphi}_n$ bzw. $\underline{\varphi}_d$ das PEEC-Modell in Matrixschreibweise [5].

Die hier dargestellte MagPEEC-Methode beinhaltet über den Anteilen der PEEC-Methode hinaus in (3.18) die $2N_p \times 2N_p$ vollbesetzte Matrix \mathbf{T}_{μ} , welche eine Kopplung der Oberflächenzellen untereinander und in Verbindung mit dem $2N_p \times 1$ Vektor der Magnetisierungsflächenströme \mathbf{i}_p das Verhalten magnetischer Materialien beschreibt. Diese Matrix setzt sich aus den von der relativen Permeabilität abhängigen Hauptdiagonalelementen T_{uu}^{μ} und den nur von der Geometrie der Oberflächenzellen abhängigen Nebendiagonalelementen T_{vu}^{μ} zusammen⁴. Die beidseitige Kopplung der beiden Verfahren ist über die $2N_p \times N_b$ Matrix $\mathbf{T}_{\kappa\mu}$ und

⁴ Im Allgemeinen ist anhand des integralen Ausdrucks T_{vu}^{μ} nicht deutlich, dass dieser für $u = v$ verschwindet. Dieser Fall ist in Abschnitt 3.8 auf Seite 63 detailliert beschrieben.

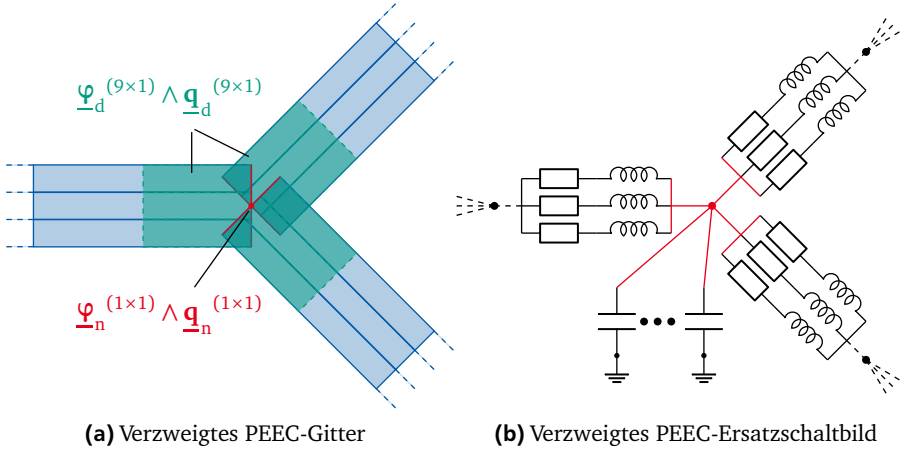


Abbildung 3.5.: Veranschaulichung zu der Knotenreduktion bei der PEEC-Methode an einem Beispiel aus neun Stromzellen und neun in grün dargestellten Ladungszellen. Reduziert sind die Ladungszellen mittels der Knotenreduktionsmatrix \mathbf{D} auf einen in rot dargestellten Knoten. (a) PEEC-Gitter. (b) Resultierendes Ersatzschaltbild.

der $N_b \times 2N_p$ Matrix $\mathbf{L}_{\mu k}$ gegeben.

Beim Vergleich von (3.18b) mit (3.13b) wird deutlich, dass die Indizes des Potentials zu „d“ geändert sind, da die Diskretisierung des dualen Gitters bei komplexen Problemstellungen von der Diskretisierung des primären Gitters abweichen kann, sodass an jedem Knoten mehrere Ladungszellen definiert sind. Dieses ist zum Beispiel der Fall, wenn mehrere Leiter von einem Knoten abgehen, was in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Wenn bei diesen so verzweigten Systemen mehrere Ladungszellen mit einem Knoten verbunden sind, lässt sich eine Knotenreduktionsinzidenz

$$\mathcal{D}_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{wenn die Ladung } m \text{ mit der Zelle } n \text{ verbunden ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.19)$$

definieren [63, 64], welche die Zellen des dualen Gitters den Knoten zuordnet. In dem in Abbildung 3.5 dargestellten Beispiel werden 9×9 Potentialkoeffizienten P_{iq} bestimmt und durch diese Inzidenz auf eine 1×1 Matrix reduziert. Es sei erwähnt, dass nur eine Reduktion der Zellen des dualen Gitters auf die Knoten möglich ist, wodurch die Anzahl der Zellen des dualen Gitters immer mindestens der Anzahl

der Knoten entspricht. Der Zusammenhang der Ladungen $\underline{\mathbf{q}}_d$ und den Potentialen $\underline{\varphi}_d$ des genutzten Gitters mit den Ladungen $\underline{\mathbf{q}}_n$ und den Potentialen $\underline{\varphi}_n$ der reduzierten Knoten ist durch

$$\underline{\mathbf{q}}_n = \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{q}}_d, \quad (3.20a)$$

$$\underline{\varphi}_d = \mathbf{D} \underline{\varphi}_n \quad (3.20b)$$

bestimmt. Ist ein konsistentes, korrekt nummeriertes duales Gitter genutzt, so ergibt sich eine triviale Knotenreduktionsmatrix \mathbf{D} in Form einer Diagonalmatrix. Es lässt sich darüber hinaus mittels $\mathbf{C}_s = \mathbf{D}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}$ eine $N_n \times N_n$ vollbesetzte Matrix der Kurzschlusskapazitäten \mathbf{C}_s definieren. Durch die direkte Nutzung dieser Kurzschlusskapazitätsmatrix muss die Matrix der Potentialkoeffizienten \mathbf{P} im Vorfeld invertiert werden. Der Aufwand dafür ist bei den in der vorliegenden Arbeit untersuchten Anwendungen gering und wird akzeptiert. Falls der Aufwand für diese Inversion steigt, sollte auf andere Formulierungen, wie z. B. in [54] vorgestellt, zurückgegriffen werden.

Mittels der durchgeführten Vereinfachungen kann (3.18) als ein Matrixsystem durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} & j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa} \\ \mathbf{A}^T & -j\omega\mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\kappa\mu} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{T}}_{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_b \\ -\underline{\varphi}_n \\ \underline{\mathbf{i}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

beschrieben werden, wobei die Anteile der klassischen PEEC-Methode in (3.21) grau und die Anteile der Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien rot unterlegt sind. Die Kopplungen zwischen dem klassischen PEEC-System und dem System für die magnetischen Materialien erfolgt in der Zeile 1 Spalte 3 und in der Zeile 3 Spalte 1. Die Form des grau unterlegten Systems (klassisches PEEC-System) entspricht dem des modifizierten Knotenadmittanzverfahrens (*engl. Modified Nodal Approach – MNA*) [65], was ein in der Netzwerktheorie typischer Ansatz zum Lösen von verzweigten, elektrischen Netzwerken ist. Der Unterschied zum Knotenadmittanzverfahren ist, dass gleichzeitig Zweigströme und Knotenpotentiale als Unbekannte eingeführt werden und sich somit gleichzeitig Impedanzen in der ersten Zeile und Admittanzen in der zweiten Zeile der Systemmatrix ergeben.

Die Darstellung in (3.21) lässt sich als gekoppeltes System von zwei unabhängigen numerischen Verfahren interpretieren. Die Anteile links unten und rechts oben der Systemmatrix repräsentieren die Kopplungen zwischen der PEEC-Methode und der Oberflächenintegraldarstellung homogener, isotroper und linearer magnetischer Materialien.

3.4 Anregung des Systems

Die Anregung des in (3.21) definierten Matrixsystems der MagPEEC-Methode erfolgt durch das Ersetzen des Vektors auf der rechten Seite in (3.21). Aufgrund der verkoppelten Methode ergeben sich unterschiedliche Möglichkeiten, das System anzuregen. Die ersten N_b Einträge entsprechen der Anregung der Maschengleichung mit den Zweigspannungen \underline{u}_s , wobei sich diese Spannungen als Potentialdifferenz zwischen den Start- und Endknoten der Stromzelle oder des Zweigs darstellt. Mit den folgenden N_n Einträgen lässt sich die Knotengleichung mit eingepprägten Strömen \underline{i}_s anregen, wohingegen die letzten $2N_p$ Einträge des Vektors im Folgenden genauer betrachtet werden müssen.

Der Ansatz der zu Grunde liegenden Oberflächenintegraldarstellung in (3.1c) ist das Auswerten der gesamten magnetischen Flussdichte an der Oberfläche des magnetischen Materials. Mit dem Ansatz, dass die gesamte magnetische Flussdichte $\underline{\vec{B}}$ durch eine Superposition aus einer eingepprägten Flussdichte $\underline{\vec{B}}_0$ und den Wirbeln des magnetischen Vektorpotentials durch

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 + \text{rot} \underline{\vec{A}} \quad (3.22)$$

beschrieben wird, ergibt sich die Basis für die Herleitung der Anregung der Oberflächenintegraldarstellung. Dieses ist äquivalent den vorher beschriebenen Ausführungen durchzuführen. Dabei ergibt das Ansetzen des inneren Produkts aus (3.15)

$$\underline{I}_\nu^{MO} = \int_{S_\nu} \frac{\vec{e}_\nu}{w_\nu} \cdot [\underline{\vec{B}}_0 \times \vec{n}_\nu] \, dA = l_\nu [\vec{e}_\nu \cdot (\underline{\vec{B}}_0 \times \vec{n}_\nu)] \quad (3.23)$$

und l_ν entspricht der Länge des ν -ten Oberflächenelements. Das einfache Auswerten des Integrals in (3.23) ist nur möglich, da die eingepprägte Flussdichte $\underline{\vec{B}}_0$ konstant über den orthogonalen Oberflächenelementen angenommen wird. Die Anregungen für jede Oberflächenelemente werden in dem $2N_p \times 1$ letzten Anteil des Anregungsvektors zusammengefasst. Resultierend lässt sich das System aus (3.21) gemeinsam mit den Anregungen durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} & j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa} \\ \mathbf{A}^\top & -j\omega\mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\kappa\mu} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{T}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_b \\ -\underline{\varphi}_n \\ \underline{\mathbf{i}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_s \\ \underline{\mathbf{i}}_s \\ -\underline{\mathbf{i}}_{p0} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

darstellen. Im Verlauf dieser Arbeit werden für die Lösung der Systeme ausschließ-

lich direkte Löser eingesetzt, da typischerweise der Aufwand zum Assemblieren der Matrixeinträge erheblich höher als der Aufwand zum Lösen des Systems ist. Sollte der numerische Aufwand zum Lösen des Systems steigen, kann auf iterative Lösungsverfahren ausgewichen werden. Der Aufwand direkter Lösungsverfahren steigt mit $\mathcal{O}(N^3)$ und der Aufwand iterativer Lösungsverfahren steigt mit $\mathcal{O}(N^2)$, wobei N hier der Matrixgröße entspricht. Es ist darauf hinzuweisen, dass sich durch einmaliges Bestimmen und Speichern der partiellen Elemente und schrittweises Ersetzen der Kreisfrequenz ω schnelle Frequenzbereichssimulationen mit einer Vielzahl von Frequenzpunkten für eine geringe Systemmatrixgröße durchführen lassen. Steigt der Aufwand zum Lösen des Systems kann darüber hinaus auch auf Algorithmen der Modelordnungsreduktionsverfahren (MOR) zurückgegriffen werden [22, 66], welche allerdings nicht Bestandteil der vorliegenden Arbeit sind.

3.5 Bestimmung der Torimpedanz

Häufig wird in den praktischen Anwendungen der PEEC-Methode die Impedanz einer Anordnung an einem oder mehreren diskreten Toren gesucht (vgl. Kapitel 4). Bei der vorgestellten MagPEEC-Methode lässt sich direkt entsprechend der klassischen PEEC-Methode an einem Knoten des Systems in (3.24) ein konstanter Strom $\underline{I}_{\text{Tor}}$ einprägen, dieser an einem anderen Knoten herausführen und die resultierende Spannung $\underline{U}_{\text{Tor}}$ bestimmen, womit sich die Torimpedanz $\underline{Z}_{\text{Tor}}$ ergibt. Dieses Verhalten ist bei anderen Simulationsmethoden, die nicht auf einem äquivalenten Ersatzschaltbild beruhen, nicht trivial und ergibt einen Vorteil zu der vorgestellten Methode. Typischerweise wird für die PEEC-Methode eine Inzidenz durch [54]

$$\mathcal{K}_{nm} = \begin{cases} +1, & \text{wenn der } m\text{-te Strom in den } n\text{-ten Knoten eintritt,} \\ -1, & \text{wenn der } m\text{-te Strom aus dem } n\text{-ten Knoten austritt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.25)$$

definiert, womit sich die Information der Wahl der Tore in das System einprägen lässt. Die Größe der resultierenden Torinzidenzmatrix \mathbf{K} ist $N_n \times N_{\text{Tor}}$ und ergibt somit die Möglichkeit der gleichzeitigen Wahl mehrerer Tore, welche jeweils einer Spalte der Matrix \mathbf{K} entsprechen. Die Formulierung der Anregung mittels der

Torinzidenzmatrix ergibt sich bei der MagPEEC-Methode zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} & j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa} \\ \mathbf{A}^\top & -j\omega\mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\kappa\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_b \\ -\underline{\varphi}_n \\ \underline{\mathbf{i}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \underline{I}_{\text{Tor}}, \quad (3.26)$$

wobei der Strom in die Tore durch den skalaren Wert $\underline{I}_{\text{Tor}}$ gesetzt werden kann. Das System lässt sich damit in eine Zustandsraumdarstellung, wie in [20, 22] für die klassische PEEC-Methode durchgeführt, überführen und die Übertragungsfunktion als Torimpedanz

$$\underline{Z}_{\text{Tor}}(\omega) = \frac{\underline{\mathbf{U}}_{\text{Tor}}}{\underline{I}_{\text{Tor}}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} & j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa} \\ \mathbf{A}^\top & -j\omega\mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\kappa\mu} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_\mu \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

definieren. Dabei entspricht $\underline{\mathbf{Z}}_{\text{Tor}}$ der Matrix der Torimpedanzen und $\underline{\mathbf{U}}_{\text{Tor}}$ der Matrix der Torspannungen. Der Vorteil der gleichzeitigen Definition mehrerer Tore erschließt sich wie folgt: Besitzt die Torinzidenzmatrix \mathbf{K} mehrere Spalten, so resultiert durch einmaliges Invertieren der Systemmatrix in (3.27) eine $N_{\text{Tor}} \times N_{\text{Tor}}$ Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}_{\text{Tor}}$, welche die frequenzabhängigen \underline{Z} -Parameter des Systems darstellt. Als Beispiel eines Zwei-Tor-Systems ist in Abschnitt 4.3 die Matrix der \underline{Z} -Parameter eines Leiterplattentransformators bestimmt und untersucht.

3.6 MNA Formulierung für die MagPEEC-Methode

Wie in vorherigen Abschnitten erwähnt, ist das resultierende System der MagPEEC-Methode in (3.24) nicht vollständig als äquivalentes Ersatzschaltbild interpretierbar und daher eine Nutzung von klassischen Schaltungssimulatoren nicht unmittelbar möglich. Durch ein geeignetes Schur-Komplement lässt sich jedoch eine Darstellung eines äquivalenten Ersatzschaltbildes konstruieren. Dazu wird die dritte Zeile des Systems in (3.24), welche der diskretisierten Oberflächenintegralgleichung an magnetischen Materialien entspricht, nach den magnetischen Oberflächenströmen durch

$$\mathbf{T}_{\kappa\mu}\underline{\mathbf{i}}_b + \mathbf{T}_\mu\underline{\mathbf{i}}_p = -\underline{\mathbf{i}}_{p0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\mathbf{i}}_p = -\mathbf{T}_\mu^{-1} \left(\underline{\mathbf{i}}_{p0} + \mathbf{T}_{\kappa\mu}\underline{\mathbf{i}}_b \right) \quad (3.28)$$

aufgelöst und diese in der ersten Gleichung von (3.24)

$$(\mathbf{R} + j\omega \underbrace{[\mathbf{L} - \mathbf{L}_{\mu\kappa} \mathbf{T}_{\mu}^{-1} \mathbf{T}_{\kappa\mu}]}_{:= \tilde{\mathbf{L}}}) \mathbf{i}_{\mathbf{b}} - \mathbf{A} \underline{\varphi}_{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} + \mathbf{L}_{\mu\kappa} \mathbf{T}_{\mu}^{-1} \mathbf{i}_{\mathbf{p}0} \quad (3.29)$$

substituiert [29]. Es entsteht somit eine in Abhängigkeit der magnetischen Materialien modifizierte Induktivitätsmatrix $\tilde{\mathbf{L}}$ des Systems und ein zusätzlicher Beitrag zu der anregenden Zweigspannungen $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}$ über den PEEC-Zellen. Das genutzte Verfahren realisiert die Anwendung des Schurkomplements, was der Teillösung des System $\mathbf{L}_{\mu\kappa} \mathbf{T}_{\mu}^{-1} \mathbf{T}_{\kappa\mu}$ entspricht. Das resultierende System ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega \tilde{\mathbf{L}} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & -j\omega \mathbf{C}_{\mathbf{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{\mathbf{b}} \\ -\underline{\varphi}_{\mathbf{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} + \mathbf{L}_{\mu\kappa} \mathbf{T}_{\mu}^{-1} \mathbf{i}_{\mathbf{p}0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

wobei die Struktur einem klassischen MNA System entspricht und somit direkt in eine Netzliste geschrieben und anschließend mit einem Schaltungssimulator (z. B. SPICE) gelöst werden kann.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass im Allgemeinen die relative Permeabilität komplexwertig und frequenzabhängig sein kann und diese nach (3.17) einen Beitrag zu den Einträgen auf der Hauptdiagonalen von \mathbf{T}_{μ} leistet. Somit würde sich eine komplexe und frequenzabhängige modifizierte Induktivitätsmatrix $\tilde{\mathbf{L}}(\omega)$ ergeben. Zumindest die Frequenzabhängigkeit der resultierenden partiellen Elemente sind nicht ohne Weiteres von klassischen Schaltungssimulatoren zu verarbeiten und das hier dargestellte Verfahren der modifizierten Induktivitätsmatrix ist somit nur für eine frequenzunabhängige relative Permeabilität möglich.

3.7 Nicht-orthogonale MagPEEC-Formulierung

Basierend auf einer Arbeit aus dem Jahre 2003 [6] wurde die Formulierung der PEEC-Methode um nicht-orthogonale Zellen⁵, wie sie in Abbildung 3.6a dargestellt sind, erweitert [67]. Wie in den vorherigen Abschnitten hergeleitet, sind die genutzten Ansatzfunktionen für das Galerkin-Verfahren der klassischen PEEC-Methode auf orthogonalen Gittern definiert. Dieses bedeutet, dass z. B. bei den Volumenzellen für die Leitungsströme eine Länge l der Zelle definiert wird, worüber die Querschnittsfläche A konstant ist. Auch die Oberflächenzellen der Magnetisierungsoberflächenstromdichte sind in den vorherigen Kapiteln orthogonal

⁵ Im Gegensatz zu orthogonalen Zellen können die Winkel in den Ecken der nicht-orthogonalen Zellen auch andere Werte ungleich 90° annehmen.

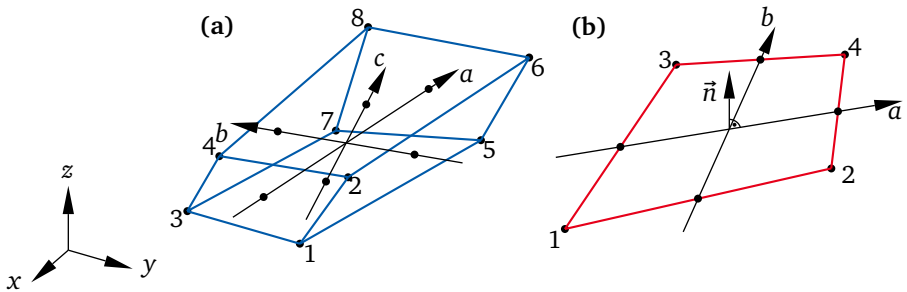


Abbildung 3.6.: Darstellung einer nicht-orthogonalen Zelle mit dem zugehörigen Koordinatensystemen a, b, c bzw. a, b . (a) Volumenzelle für die Leitungsströme und Ladungen. (b) Oberflächenzelle für die Oberflächenströme.

angenommen, was eine konstante Weite w über der Länge l ergibt. Das Einführen eines nicht-orthogonalen Gitters für die Volumen- und Oberflächenzellen, wie sie in Abbildung 3.6 dargestellt sind, lässt die Approximation von komplexeren Geometrien (z. B. Kreise, Kugeln) mit weniger Zellen und damit mit weniger Rechenaufwand auf natürliche Weise zu.

Wie in Abbildung 3.6 dargestellt, wird in jeder 8-eckigen Volumen- und 4-eckigen Oberflächenzelle ein Koordinatensystem (a, b, c) bzw. (a, b) definiert, wobei eine 3-fach lineare bzw. eine bilineare Abbildung angesetzt wird. Jede Koordinatenachse wird linear auf den Bereich zwischen $[-1, 1]$ einer neuen Koordinatenachse nach den Vorschriften

$$\vec{r}(a, b, c) = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 [1 + a_n a][1 + b_n b][1 + c_n c] \vec{r}_n, \quad (3.31a)$$

$$\vec{r}(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 [1 + a_n a][1 + b_n b] \vec{r}_n \quad (3.31b)$$

transformiert [6, 68]. Hierbei wird (3.31a) für die Volumenzellen und (3.31b) für die Oberflächenzellen genutzt. Die Koeffizienten a_n , b_n und c_n sind gleich den Werten der Koordinaten a , b und c in den jeweiligen Ecken der Zellen (-1 oder $+1$). Dadurch ist die Transformation für das komplette Volumen bzw. der kompletten Fläche in ein Intervall von $a, b, c \in [-1, 1]$ der nicht-orthogonalen Zellen bestimmt.

Diese Lineartransformationen ergeben geradlinige, aber nicht-orthogonale Koordinatensysteme, welche typischerweise mit den Einheitsvektoren und Metrikkoeffizienten

$$\vec{e}_i(a, b, c) = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial i}, \quad (3.32a)$$

$$h_i(a, b, c) = \left| \frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial i} \right| \quad (3.32b)$$

für jede Raumrichtung $i = a, b, c$ beschrieben werden können [69]. Es sei darauf hingewiesen, dass die Einheitsvektoren und Metrikkoeffizienten bei nicht-orthogonalen Zellen von dem Raumpunkt innerhalb der Zelle abhängen. Bei dem Spezialfall einer orthogonalen Zelle sind die Einheitsvektoren hingegen konstant, im rechten Winkel zueinander angeordnet und der Betrag der Ableitung ergibt in jede Richtung die triviale Lösung eins. Für die Vektoren und Metrikkoeffizienten in (3.32) sind die Ableitungen des Ortsvektors \vec{r} gegenüber den Koordinaten a, b und c zu bestimmen. Hier wird aus Gründen der Übersichtlichkeit ausschließlich die Ableitung nach a angegeben

$$\frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial a} = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^8 a_n [1 + b_n b] [1 + c_n c] \vec{r}_n, \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial \vec{r}(a, b)}{\partial a} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 a_n [1 + b_n b] \vec{r}_n, \quad (3.33b)$$

wobei die weiteren Richtungsableitungen der Transformationsvorschriften analog zu bestimmen oder grundlegender Literatur [69] zu entnehmen sind. Bei der Integration innerhalb nicht-orthogonaler Koordinatensysteme entstehen Strecken-, Flächen- und Volumenelemente, die aus der Determinante der Jacobi-Matrix oder auch der Funktionaldeterminante bestimmt werden. Diese sind aufgrund der veränderlichen Einheitsvektoren und Metrikkoeffizienten nicht konstant und in jedem Raumpunkt neu zu berechnen. Auch hier sind die Flächen und Volumenelemente

ausschließlich für die Koordinate a angegeben

$$d\vec{A}_a(a, b, c) = \vec{e}_a \left| \overbrace{\frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial b} \times \frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial c}}^{:=A_a(a, b, c)} \right| db dc, \quad (3.34a)$$

$$dV_a(a, b, c) = \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial b} \times \frac{\partial \vec{r}(a, b, c)}{\partial c} \right) \right|}_{:=V_a(a, b, c)} da db dc, \quad (3.34b)$$

da die verbleibenden Größen durch zyklischen Vertauschen bestimmt werden können. Weitere Informationen sind Standardwerken zu entnehmen (z. B. [69]) und aus Gründen der Übersichtlichkeit sind im Folgenden die Abhängigkeiten der Flächen- und Volumenelemente von den Koordinaten a, b, c nicht mitgeführt.

Werden die beschriebenen Definitionen für nicht-orthogonale PEEC-Gitter verwendet, müssen die in (3.4) definierten Ansatzfunktionen der Volumenstromdichte, Raumladungsdichte und Oberflächenstromdichte ersetzt werden. Die unbekannten Größen sind innerhalb der nicht-orthogonalen Flächen bzw. Volumina der Zellen nicht konstant, wie es in der in (3.4) eingeführten Darstellung angesetzt wurde, sondern es wird eine Homogenität in den nicht transformierten Zellen vorausgesetzt. Das heißt im Speziellen, dass durch die linearen Transformationen aus (3.31) die ursprünglich homogenen Stromdichten in ein nicht-orthogonales Gitter linear transformiert werden. Als Stromrichtung wird hier in den Volumen- und Oberflächenzellen die a -Richtung definiert, wodurch die Ansatzfunktionen

$$\underline{\vec{J}}^C(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N_b} \underline{I}_n^C \vec{m}_n(\vec{r}), \quad \vec{m}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{h_a \vec{e}_a}{4V_a}, & \vec{r} \in n\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.35a)$$

$$\underline{\varrho}^C(\vec{r}) = \sum_{q=1}^{N_n} \underline{Q}_q^C \nu_q(\vec{r}), \quad \nu_q(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{8V_a}, & \vec{r} \in i\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.35b)$$

$$\underline{\vec{K}}^M(\vec{r}) = \sum_{u=1}^{2N_p} \underline{I}_u^M \vec{p}_u(\vec{r}), \quad \vec{p}_u(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{h_a \vec{e}_a}{2A_a}, & \vec{r} \in u\text{-te Zelle,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.35c)$$

resultieren. Eine ähnliche Wahl der Ansatzfunktionen wurde in [70, 71, 72] durchgeführt und hier sei im Speziellen auf die konstanten Faktoren $1/2$, $1/4$ und $1/8$ verwiesen. Das Integrationsgebiet erstreckt sich über das Intervall $[-1, 1]$ und eine Normierung der Ansatzfunktionen ist hinsichtlich der korrekten partiellen Elemen-

te für das resultierende äquivalente Ersatzschaltbild notwendig.

Nach der Durchführung der Galerkin-Methode, wie in Abschnitt 3.1 auf einem orthogonalen Gitter detailliert beschrieben, ergibt sich ein ähnliches System aus partiellen Elementen, Maschen- und Knotengleichungen. Es lässt sich äquivalent zu der Formulierung für orthogonale Zellen eine Inzidenz \mathcal{A}_{ni} , welche in (3.12) definiert ist, herleiten. Auch hier muss das duale Gitter der Ladungszellen konsistent gegenüber dem Gitter der Stromzellen gewählt sein, damit die Inzidenz nur mit 1, -1 oder 0 Einträgen gefüllt ist und die Interpretation eines äquivalenten Ersatzschaltbilds möglich ist.

Die integralen Ausdrücke der PEEC-Methode auf nicht-orthogonalen Volumengittern ergeben sich zu [70]

$$R_{mm} = \frac{1}{16\kappa_m} \int_a \int_b \int_c \frac{h_a^2}{V_a} dc db da, \quad (3.36a)$$

$$L_{mn} = \frac{\mu_0}{16} \int_a \int_b \int_c \int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') h_a h'_a (\vec{e}_a \cdot \vec{e}'_a) dc' db' da' dc db da, \quad (3.36b)$$

$$P_{iq} = \frac{1}{\varepsilon_0 64} \int_a \int_b \int_c \int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dc' db' da' dc db da, \quad (3.36c)$$

wobei die gestrichenen Metrikkoeffizienten, Einheitsvektoren und Koordinaten denen des Quellvolumens mit den Indizes „n“ und „q“ entsprechen. Analog hergeleitet lassen sich die partiellen Elemente der nicht-orthogonalen Oberflächenelemente an magnetischen Materialien durch

$$\underline{T}_{uu}^\mu = \frac{1}{4} \left(\frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} + \frac{1}{2} \right) \int_a \int_b \frac{h_a^2}{A_a} db da, \quad (3.37a)$$

$$\underline{T}_{vu}^\mu = \frac{1}{4} \int_a \int_b h_a \vec{e}_a \cdot \left\{ \left(\int_{a'} \int_{b'} h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a db' da' \right) \times \vec{e}_c \right\} db da \quad (3.37b)$$

darstellen. Dabei entsprechen hingegen die gestrichenen Größen dem Index „u“. Die Kopplungen der Magnetisierungsoberflächenströme gegenüber den elektrischen

Strömen ergeben sich zu

$$L_{mu}^{\mu\kappa} = \frac{\mu_0}{8} \int_a \int_b \int_c \int_{a'} \int_{b'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') h_a h'_a (\vec{e}_a \cdot \vec{e}'_a) db' da' dc db da, \quad (3.38a)$$

$$T_{vn}^{\kappa\mu} = \frac{1}{8} \int_a \int_b h_a \vec{e}_a \cdot \left\{ \left(\int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a dc' db' da' \right) \times \vec{e}_c \right\} db da \quad (3.38b)$$

und die gestrichenen Größen in (3.38a) entsprechen dabei dem Index „u“ und in (3.38b) dem Index „n“. Die in Tabelle 3.1 auf Seite 47 dargestellten integralen Ausdrücke für orthogonale Zellen sind als Vereinfachungen der hier gelisteten Ausdrücke für nicht-orthogonale Zellen zu verstehen und lassen sich durch Ersetzen der Metrikoeffizienten und Einheitsvektoren im orthogonalen Fall ableiten.

Die in Abschnitt 3.4 beschriebene Anregung mit eingepprägten Oberflächenmagnetisierungsströmen auf Basis einer überlagerten eingepprägten magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 stellt sich bei einer nicht-orthogonalen Oberflächenzelle als

$$\underline{I}_v^{M0} = \frac{1}{2} \int_a \int_b h_a \vec{e}_a \cdot [\vec{B}_0 \times \vec{e}_c] db da \quad (3.39)$$

dar. In (3.37b), (3.38b) und (3.39) ersetzt im Gegensatz zu den Ausdrücken der orthogonalen Zellen in Tabelle 3.1 auf Seite 47 der ortsabhängige Einheitsvektor $\vec{e}_c(a, b, c)$ den über der orthogonalen Oberflächenzelle konstanten Oberflächennormalenvektor \vec{n} . Dadurch lassen sich die integralen Ausdrücke auch für nicht-planare Oberflächenzellen bestimmen. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird jedoch die Einschränkung auf planare Oberflächenzellen angewendet und der ortsabhängige Einheitsvektor dementsprechend durch den konstanten Oberflächennormalenvektor

$$\vec{e}_c(a, b, c) := \vec{n} \neq \vec{f}(a, b, c) \quad (3.40)$$

ersetzt, wobei \vec{f} einer beliebigen Vektorfunktion entspricht.

3.8 Assemblieren der Systemmatrix

Wie in vorherigen Abschnitten erwähnt, ist das Assemblieren der Systemmatrix aus (3.24) bei der vorgestellten MagPEEC-Methode mit dem höchsten Rechenauf-

wand verbunden und resultiert somit in der höchsten Rechenzeit⁶. Aufgrund dessen ist es für die effiziente Implementierung der MagPEEC-Methode entscheidend, das Assemblieren im Detail zu betrachten. In der Literatur wird das Assemblieren typischerweise bei der PEEC-Methode auch Stempeln (*engl. Stamping*) der partiellen Elemente in die Systemmatrix des modifizierten Knotenadmittanzverfahren genannt. Dabei müssen die integralen Ausdrücke aus Tabelle 3.1 und Abschnitt 3.7 nacheinander aus den geometrischen Abmessungen aller Zellen zueinander gelöst werden, wobei eine Vielzahl von Möglichkeiten mit variierender Effizienz existieren. Im Allgemeinen lassen sich geschlossene analytische Lösungen, approximierte Ausdrücke oder numerische Integrationsalgorithmen einsetzen, wohingegen im Vorfeld anhand der Zellgeometrien hinsichtlich der zu bestimmenden Kopplungen eine effiziente Methode gewählt wird. In der Literatur wird dieses Vorgehen als Mehrfunktions-PEEC (*engl. Multifunction-PEEC*) bezeichnet, was in [21, 73, 74] eingeführt und in [122, 123] weiterentwickelt wurde. Im Folgenden ist die Implementierung erläutert, welche für die praktischen Anwendungen in Kapitel 4 eingesetzt wurde. Dabei sei darauf verwiesen, dass an dieser Stelle beliebig viele weitere Möglichkeiten existieren und für andere Anwendungen andere Lösungswege Vorteile ergeben können.

Mitteln des dualen Gitters für Leiterplattenstrukturen

Bei hochleitfähigen Strukturen wird aufgrund der sehr geringen Relaxationszeit der Ladungen gegenüber der kleinsten Anstiegszeit des genutzten Signals die Ladungsverteilung ausschließlich auf der Oberfläche des leitfähigen Materials angenommen. Es lässt sich zeigen, dass die integralen Ausdrücke über das duale Gitter ausschließlich auf den Oberflächen dieses Gitters ausgewertet werden können [9]. Typischerweise ist bei Leiterbahnen aus Kupfer mit einer elektrischen Leitfähigkeit von 58 MS m^{-1} diese Annahme gerechtfertigt [75]. Wenn ein aus Quadern bestehendes Volumengitter auf seine Oberflächen reduziert wird, ergeben sich pro Quader sechs Rechtecke und somit resultiert durch diese Annahme eine erhebliche Erhöhung der Anzahl der Potentialkoeffizienten N_n des dualen Gitters. Dennoch steht demgegenüber die Reduktion der Integrationsdimensionen von einem sechsfachen auf ein vierfaches Integral in der vierten Zeile der Tabelle 3.1 auf Seite 47.

Zudem ist bei Leiterplattenstrukturen typischerweise die Dicke gering gegenüber der Breite der Leiterbahnen ($t_s \ll w_s$), womit die resultierenden sechs Flächen zu einer gemittelten Fläche approximiert werden. Damit reduziert sich der integrale Ausdruck für die Potentialkoeffizienten bei orthogonalen und nicht-orthogonalen

⁶ In Abschnitt 4.1 ist dieses Verhalten anhand eines akademischen Beispiels ausführlich untersucht.

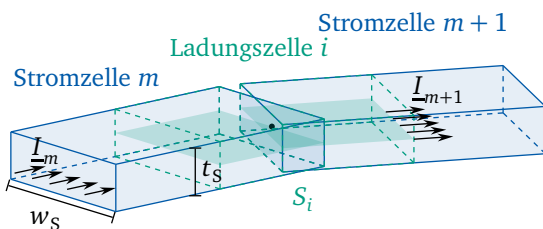


Abbildung 3.7.: Darstellung der Mittlung des dualen Volumengitters auf eine Oberflächenzelle an einer Ecke, wodurch die i -te Ladungszelle in zwei Oberflächenanteile zerfällt. Die Mittlung ist nur unter der Voraussetzung $w_s \gg t_s$ gültig und wird für das Modellieren von Leiterplattenstrukturen eingesetzt.

Zellen zu

$$P_{iq} = \frac{1}{\epsilon_0 S_q S_i} \int_{S_i} \int_{S'_q} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' dA, \quad (3.41a)$$

$$P_{iq} = \frac{1}{\epsilon_0 16} \int_a \int_b \int_{a'} \int_{b'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') db' da' db da, \quad (3.41b)$$

wobei das Integrationsgebiet in (3.41a) mit S bzw. S' deklariert ist, damit eine deutliche Abgrenzung gegenüber der Integration über einer Querschnittsfläche A bzw. A' gegeben ist. In Abbildung 3.7 ist eine gemittelte Zelle des dualen Gitters für die Modellierung von Leiterplattenstrukturen dargestellt. Hier sei zu erwähnen, dass die Ladungszellen typischerweise an gekrümmten Leiterbahnen, wie in Abbildung 3.7 visualisiert, aus zwei Teilzellen bestehen. Anschließend muss nur noch über alle Teilgebiete summiert werden, was auch in Abschnitt 3.3 detailliert beschrieben wurde.

Nulleinträge im Vorfeld bestimmen

Bevor ein integraler Ausdruck berechnet wird, lässt sich mit nur geringem numerischen Aufwand prüfen, ob dieser null ist, sodass die explizite Berechnung dafür eingespart werden kann.

Der integrale Ausdruck der partiellen Induktivität L_{mn} zweier orthogonaler Zellen – definiert in der zweiten Zeile in Tabelle 3.1 auf Seite 47 – ergibt null, sobald das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n$ oder $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_u$ verschwindet. Dieses ist der Fall, sobald beide Richtungsvektoren orthogonal zueinander stehen.

Darüber hinaus sind in der letzten Zeile der Tabelle 3.1 auf Seite 47 die Kopplung der Oberflächenzellen untereinander T_{vu}^μ und die Kopplung der Oberflächenzellen in die PEEC-Volumenzellen $T_{vn}^{\kappa\mu}$ für den orthogonalen Fall dargestellt. Bei der stellvertretenden Betrachtung der Kopplung der v -ten und u -ten Oberflächenzelle

Tabelle 3.2.: Zusammenfassung der abgeleiteten Regeln zum Bestimmen der Nulleinträge bei der Kopplung der Oberflächenzellen T_{vu}^μ .

Regel	Bedingungen	Abgeleitete Regeln
I	$(\vec{e}_v \perp \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}) \wedge (\vec{e}_v \perp \vec{e}_u)$	—
II	$(\vec{e}_v \perp \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}) \wedge (\vec{n}_v \perp \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'})$	—
III	$(\vec{n}_v \perp \vec{e}_u) \wedge (\vec{n}_v \perp \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'})$	Koplanar (vgl. Abb. 3.8a)
IV	$(\vec{n}_v \perp \vec{e}_u) \wedge (\vec{e}_v \perp \vec{e}_u)$	90°-Kante ^a (vgl. Abb. 3.8b)

^a Nicht alle 90°-Kanten ergeben null. Die Richtungs- und Oberflächennormalenvektoren müssen in korrekter Konfiguration vorliegen.

lässt sich

$$T_{vu}^\mu \sim \vec{e}_v \cdot \{ (\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} \times \vec{e}_u) \times \vec{n}_v \} \quad (3.42)$$

extrahieren, wobei $\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}$ der Richtungsvektor des Gradienten der Green'schen Funktion ist (vgl. Definition auf Seite 13). Mit diesem Zusammenhang lässt sich ein skalarer Wert nur in Abhängigkeit der Richtung und der Orientierung der Zellen im dreidimensionalen Raum bestimmen. Ist dieser null, so verschwindet auch der Wert des resultierenden integralen Ausdrucks. Durch Ausnutzen des doppelten Vektorprodukts [10, S. 190] und anschließendem Umsortieren ergibt sich aus (3.42)

$$T_{vu}^\mu \sim (\vec{e}_v \cdot \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}) (\vec{n}_v \cdot \vec{e}_u) - (\vec{e}_v \cdot \vec{e}_u) (\vec{n}_v \cdot \vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'}). \quad (3.43)$$

Die resultierenden zwei Summanden bestehen jeweils aus zwei Skalarprodukten, welche die Richtungs- und Oberflächennormalenvektoren verknüpfen. Ist ein Skalarprodukt des ersten Terms und ein Skalarprodukt des zweiten Terms null, so ergibt sich ein verschwindender, integraler Ausdruck T_{vu}^μ für die Kopplung der untersuchten Zellen. Die Kombinationen und die daraus abgeleiteten Regeln zum Verschwinden des integralen Terms sind in Tabelle 3.2 aufgeführt. Es ergeben sich zwei praktisch relevante Fälle, welche auch in Abbildung 3.8 visualisiert sind. Zum einen sind alle Kopplungen von koplanaren Oberflächenzellen null und zum anderen existieren Konstellationen der Richtungsvektoren bei 90°-Kanten, die verschwinden.

Detailliert sei hier auf Regel III eingegangen. Einerseits ist diese Regel auch für koplanare nicht-orthogonale Oberflächenzellen, wie schon in Abbildung 3.8 dargestellt, gültig. Andererseits ergibt sich dadurch und durch die Einschränkung auf

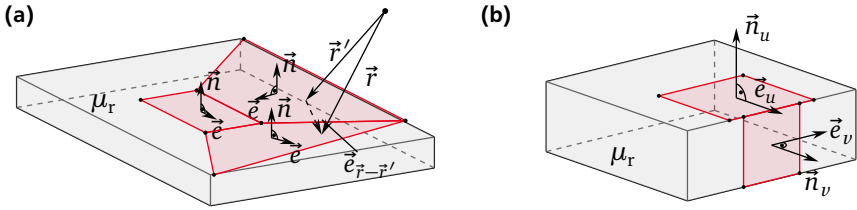


Abbildung 3.8.: Visualisierung der Nulleinträge bei den Kopplungen der Oberflächenzellen T_{vu}^μ . (a) Alle Kopplungen von koplanaren Zellen ergeben durch die Anwendung von Regel III null. (b) Darstellung der Konstellation der Richtungsvektoren an einer 90°-Kante, wodurch die Kopplung nach Regel IV null ergibt.

ausschließlich planare Oberflächenzellen, welche in Abschnitt 3.7 eingeführt wurde, ein Verschwinden des integralen Ausdrucks T_{vu}^μ für $v = u$. Im Allgemeinen ist dieser, wie auch bei den Eigeninduktivitäten üblich, aufgrund des Ansatzes der Galerkin-Methode zur Diskretisierung der Oberfläche nicht null.

Numerische Integration

Zum Aufstellen der Systemmatrix mit den allgemeinen Lösungen der nicht-orthogonalen MagPEEC-Formulierung in Abschnitt 3.7 ist die Nutzung numerischer Integrationsalgorithmen unabdingbar, da nur für manche geometrische Anordnungen geschlossene Lösungen der integralen Ausdrücke gefunden werden können. Genauso ist die Bestimmung der Einträge des Anregungsvektors der Oberflächenintegralgleichung $\underline{\mathbf{i}}_{p0}$ für nicht-orthogonale Zellen in (3.39) nur mittels eines numerischen Integrationsalgorithmus möglich. Selbst wenn analytische Ausdrücke existieren, ist teilweise eine numerische Auswertung mit dem passenden Integrationsverfahren vorteilhaft, da der Rechenaufwand deutlich geringer sein kann und der numerische Fehler so gering ist, dass dieser keinen Einfluss auf die Genauigkeit des gesamten Verfahrens hat. Solch ein Verhalten sollte bei der Nutzung von analytischen Ausdrücken vorab geprüft werden.

Es ist notwendig, Näherungsformeln für die numerische Lösung der Integrale mit hinreichender Genauigkeit und einer bekannten Konvergenzordnung zu nutzen, sodass die Auswirkung des Integrationsfehlers bekannt und gering gegenüber dem Gesamtfehler des Verfahrens ist. Zusätzlich wird Schnelligkeit und Effizienz dieser Algorithmen gefordert, weil, wie eingangs dieses Abschnitts erwähnt, der Aufwand für das Aufstellen der Systemmatrix im Allgemeinen den Aufwand des Gesamtverfahrens dominiert. Effiziente Näherungsformeln erreichen eine vorgege-

bene Genauigkeit mit minimalem Aufwand, was der minimalen Anzahl von Funktionsauswertungen entspricht.

Die Methoden der numerischen Integration, welche auch traditionell numerische Quadratur genannt wird, basieren auf der Approximation des Integranden $f(\vec{r})$ mit einem Polynom oder auch mit Polynomzügen (engl. *Splines*), welche stückweise aus Polynomen bestehen. Dementsprechend wird vorerst ein Interpolationspolynom zu N verschiedenen Stützstellen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ kreiert und anschließend integriert. Die resultierende Näherungsformel eines mit der Quadratur bestimmten Integrals über dem Integrationsgebiet Ω ergibt sich zu

$$\int_{\Omega} f(\vec{r}) d\Omega = \sum_{i=1}^N \nu_i f(\vec{r}_i) + \varepsilon_{\Omega}(N), \quad (3.44)$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$ den Quadraturgewichten und $\varepsilon_{\Omega}(N)$ dem von der Anzahl der Stützstellen abhängigen Approximationsfehlers der Quadratur entspricht. Mit dieser Näherungsformel lässt sich ein Polynom bis zu einem gewünschten Grad e exakt integrieren. Dieses wird Exaktheitsgrad genannt und ist abhängig von der Anzahl und der Position der genutzten Stützstellen.

Im Allgemeinen ergeben sich durch die beliebige Wahl der Stützstellen unterschiedliche Quadraturformeln mit unterschiedlichen Exaktheitsgraden, welche sich in die Newton-Cotes-Formeln mit äquidistant gewählten Abständen der Stützstellen und in die Gauß-Formeln mit nicht äquidistant gewählten Abständen der Stützstellen einteilen lassen. Die einfachste Form der Näherungsformel (3.44) ist die Nutzung einer Stützstelle $N = 1$, wodurch aber je nach Position dieser Stützstelle ein variierender Exaktheitsgrad resultiert. Wählt man die Funktionsauswertung an der linken Seite des Integrationsgebiets, ergibt sich ein Exaktheitsgrad von $e = N - 1$, wählt man jedoch die Funktionsauswertung an den Mittelpunkt des Integrationsgebietes ergibt sich ein Exaktheitsgrad von $e = N$, da die Symmetrieeigenschaften ausgenutzt werden. Diese Wahl der Stützstelle resultiert in der sogenannten Mittelpunktsregel. Bei den Gauß-Formeln ist die Wahl der Position der Stützstellen über dem Integrationsgebiet optimiert, sodass die resultierende Näherungsformel immer dem optimalen Exaktheitsgrad $e = 2N - 1$ in Abhängigkeit der Anzahl der Stützstellen entspricht. Die Stützstellen der Gauß-Quadraturen müssen Nullstellen orthogonaler Polynome sein und es werden typischerweise die Nullstellen der Legendre-Polynome erster Art genutzt, woraus sich die Benennung Gauss-Legendre-Quadratur ableiten lässt.

Bei der Anwendung der Newton-Cotes-Formeln, wie z. B. der Mittelpunktsregel, werden typischerweise summierte oder interpolatorische Quadraturen genutzt, womit, obwohl der Exaktheitsgrad gering ist, Integranden höherer Ordnung integriert

werden können. Dabei wird das Integrationsgebiet unterteilt und jeweils mit einem *Spline* approximiert. Im Fall der Mittelpunktsregel ist die Approximation innerhalb jedes Teilstücks als Polynom 0-ter Ordnung durchgeführt, wobei der Funktionswert des Mittelpunkts konstant über dem Teilstück angenommen ist. Der Approximationsfehler der Quadratur $\varepsilon_{\Omega}(N)$ der summierten Mittelpunktsregel konvergiert dabei für $N \rightarrow \infty$ gegen null [76]. Im Gegensatz dazu werden bei der Nutzung der Gauß-Quadraturen keine summierten Formeln eingesetzt, wodurch der Grad des Approximationspolynoms bei der Erhöhung der Anzahl der Stützstellen steigt. Die Fehler dieser Quadraturformeln konvergieren ebenfalls für $N \rightarrow \infty$ gegen null [77], weisen jedoch eine höhere Konvergenzordnung als die summierten Mittelpunktsregel auf, was ein schnelleres Abklingen des Fehlers über der Anzahl der Stützstellen ergibt. Die beschriebenen Konvergenzordnungen der summierten Mittelpunktsregel und der Gauß-Quadratur sind jedoch nur unter unterschiedlichen Voraussetzungen gegeben. Die summierte Mittelpunktsregel konvergiert auch bei Integranden mit schnell wachsenden Ableitungen und geringer Regularität, da die Ordnung der Approximationspolynome klein ist. Die zwar höhere Konvergenzordnung der Gauß-Quadraturen ist dagegen nur für vergleichsweise hohe Regularität gewährleistet. Ist somit eine numerische Integration eines Integranden hoher Regularität zu bestimmen, so nutzt man typischerweise aufgrund des besseren Konvergenzverhaltens die Gauß-Quadraturen. Bei einer numerische Integration eines Integranden mit niedriger Regularität weicht man hingegen auf summierte Newton-Cotes-Formeln aus, was in der Anwendung der FEM lange lange praktiziert wird [78]. In Anhang B.2 wird dieses Verhalten anhand eines ausgewählten Beispiels des integralen Ausdrucks T_{vu}^{μ} untersucht.

In Oberflächenelementmethoden [76] und auch in den Veröffentlichungen zu der nicht-orthogonalen PEEC-Methode werden zum Bestimmen der integralen Ausdrücke zumeist Gauß-Quadratur-Formeln verwendet [70, 74]. Dabei werden zumindest bei den Oberflächenelementmethoden Verfahren zur Regularisierung der typischerweise singulären Integranden eingesetzt. Da hier integrale Ausdrücke unterschiedlicher Integranden bestimmt werden müssen, wird je nach Integrand das effizientere Verfahren gewählt. Zur Unterscheidung werden im Folgenden die Abkürzung Mittelpunktsregel (MR) und Gauß-Legendre-Quadratur (GL) verwendet.

Bei der Bestimmung mehrdimensionaler Integrale werden typischerweise ver-

schachtelten Quadraturen angewandt, welche sich für K -Dimensionen durch

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \cdots \int_{\Omega_K} f(\vec{r}) d\Omega_1 d\Omega_2 \cdots d\Omega_K = \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_K=1}^{N_K} v_{i,1} v_{i,2} \cdots v_{i,K} f(\vec{r}(i_1), \vec{r}(i_2), \dots, \vec{r}(i_K)) + \varepsilon_\Omega(N) \quad (3.45)$$

bestimmen lassen. Grundsätzlich können bei verschachtelten Quadraturen unterschiedliche Anzahlen von Stützstellen pro Raumrichtung gewählt werden. Da jedoch der maximal erreichbare Exaktheitsgrad gleich dem Minimum der einzelnen Exaktheitsgrade ist und demzufolge die Konvergenzordnung des Gesamtverfahrens nicht höher als die des Anteils mit der geringsten Ordnung sein kann, führt die Wahl der identischen Anzahl von Stützstellen auf die effizienteste Anwendung [25]. In vektorieller Darstellung lässt sich für die Näherungsformel mehrdimensionaler Integrale in (3.45) eine kompakte Schreibweise

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} \cdots \int_{\Omega_K} f(\vec{r}) d\Omega_1 d\Omega_2 \cdots d\Omega_K = \mathbf{f}^T \mathbf{v} \quad (3.46)$$

finden, wobei der Vektor der Funktionswerte \mathbf{f} und der Vektor der Gewichte \mathbf{v} Vektoren der Größe $(NK) \times 1$ entsprechen.

Da bei den integralen Ausdrücken der MagPEEC-Methode nicht alle Integranden grundsätzlich regulär sind, muss speziell auf die Konvergenz der genutzten Quadraturformeln geachtet werden. Zum einen wird im Vorfeld geprüft, ob die Integrale in der Nähe von Singularitäten ausgeführt werden, was die Nutzung der summierten Mittelpunktsregel „MR“ ergibt. Zum anderen wird darüber hinaus ein iteratives Verfahren zum Feststellen der sinnvollen Wahl der Anzahl der Stützstellen genutzt [79]. Die Integrationsordnung N , welche gleich der Anzahl der Stützstellen in allen Raumdimensionen ist, wird inkrementell erhöht, die aktuelle Näherungslösung des Integrals mit (3.46) bestimmt und der relative Fehler ε_{Rel} zu der vorherigen Integrationsordnung berechnet. Ergibt sich ein relativer Fehler unter einer geforderten Genauigkeit $\varepsilon_{\text{Rel}} < s$, so wird die Berechnung abgebrochen und der Wert mit der bisher höchsten Integrationsordnung in die Systemmatrix geschrieben. Dieser Algorithmus ist als Pseudo-Code in Algorithmus 1 dargestellt und stellt sicher, dass unabhängig von der Konvergenzordnung alle Matrixeinträge eine obere Schranke für die Genauigkeit besitzen.

Gegenüber den Genauigkeitsvorteilen der iterativen Wahl der Anzahl der Stützstellen ergibt sich der Nachteil, dass eine Vielzahl von Funktionswerten an Stütz-

Algorithmus 1 Numerische Integration

Require: Genauigkeit s , Zellgeometrien

```
1:  $N$  = Integrationsordnung
2: Berechne  $F(1)$ 
3: for  $N = 2, 3, \dots$  do
4:   Berechne Wichtungsvektor  $\mathbf{v}(N)$  und Stützstellen  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ 
5:   Berechne Funktionswerte  $\mathbf{f}^\top(N)$ 
6:   Bestimme die Quadraturformel  $F(N) = \int_{\Omega} f \, d\Omega = \mathbf{f}^\top \mathbf{v}$ 
7:   Bestimme den relativen Fehler  $\varepsilon_{\text{Rel}} = \frac{|F(N) - F(N-1)|}{F(N)}$ 
8:   if  $\varepsilon_{\text{Rel}} < s$  then
9:     return
10:  end if
11: end for
```

stellen berechnet, aber im Anschluss verworfen werden. Um dieses zu umgehen, können hierarchische Integrationsalgorithmen eingesetzt werden [80], welche aber in Bezug auf die vorliegende Arbeit nicht speziell untersucht wurden. Ein weiterer Nachteil ist, dass jeder integrale Ausdruck mindestens mit zwei unterschiedlichen Anzahlen an Stützstellen bestimmt werden muss, um das Abbruchkriterium $\varepsilon_{\text{Rel}} < s$ zu erreichen. Um diesen Aufwand zu reduzieren, wird in Abhängigkeit von den geometrischen Verhältnissen entschieden, ob eine Berechnung eines integralen Ausdrucks mit der Anzahl der Stützstellen $N = 1$ ausreicht. Dazu wird das Verhältnis des Abstands der Mittelpunkte d_{c2c} und der maximalen Länge aller Diagonalen der beiden Zellen $l_{\text{diag,max}}$ für alle Volumenzellen und Oberflächenzellen

$$\alpha = \frac{d_{c2c}}{l_{\text{diag,max}}} \quad (3.47)$$

bestimmt. In der Literatur wird dieses auch Abstandsverhältnis (*engl. Far-Ratio*) genannt [21]. Es werden somit alle Kopplungen, die ein hohes Abstandsverhältnis aufweisen, mit der Anzahl der Stützstellen $N = 1$ bestimmt. Welche untere Grenze dafür gefordert wird, ist abhängig von vielen Parametern und wird bei der Anwendung der Algorithmen auf die praktischen Beispiele in Kapitel 4 und anhand eines Beispiels in Anhang B.1 untersucht.

Analytische und teilanalytische Lösungen

Bei der Implementierung der PEEC-Methode werden traditionell analytische oder teilanalytische Lösungen für die integralen Ausdrücke der partiellen Elemente L_{mn}

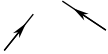








und P_{iq} genutzt. Analytische Lösungen entsprechen dabei einer vollständigen Lösung der integralen Ausdrücke über alle Integrationsgebiete, wohingegen eine teilanalytische Lösung nur einen Anteil der Integrationsgebiete löst und somit einer Approximation entspricht. Grundsätzlich ist es immer möglich, die Ergebnisse der teilanalytischen Lösungen über die restlichen Integrationsgebiete numerisch zu integrieren, womit erst eine vollständige Lösung des integralen Ausdrucks bestimmt wird. Dieses ist in [74, 81] für die Bestimmung von Koppelinduktivitäten bei nicht-orthogonalen Zellen durchgeführt. Die Vorteile, der analytischen Lösungen sind vielfältig. Beispielsweise muss bei der Implementierung nicht auf die Genauigkeit und Konvergenz der Integration geachtet werden, da die analytischen Lösungen im Regelfall eine Genauigkeit im Bereich der Rechnergenauigkeit aufweisen. Im Speziellen sei hier auf die integralen Ausdrücke, welche durch die Kopplung der PEEC-Methode mit den magnetischen Materialien entstehen, in der letzten Zeile der Tabelle 3.1 auf Seite 47 verwiesen. Der Integrationskern ist in diesem Fall der Gradient der Green'schen Funktion der Quasistatik, welcher in (2.26) definiert ist, und eine Singularität der Form $1/|\vec{r} - \vec{r}'|^2$ aufweist. Um diese Singularität zu verringern, ist die Nutzung einer zumindest teilanalytischen Lösung dieser integralen Ausdrücke sinnvoll. In Tabelle 3.3 sind alle in dieser Arbeit genutzten geschlossenen und teilanalytischen Lösungen aufgelistet, wobei in der dritten Spalte jeweils die Literaturangabe und ein Verweis auf den Anhang dargestellt ist, in dem der jeweilige analytische Ausdruck detailliert beschrieben ist. Im Folgenden sind beispielhaft einige spezielle Aspekte der Nutzung teilanalytischer Lösungen vorgestellt.

Es wird die sogenannte Filamentenlösung genutzt, welche in der ersten Zeile von Tabelle 3.3 gezeigt ist. Diese Lösung entspricht einer teilanalytische Lösung der Koppelinduktivität L_{mn} , da die Kopplung zweier infinitesimal dünner Stromfäden, welche beliebig im Raum liegen, bestimmt wird und damit nur zwei der sechs Integrationsgebiete analytisch gelöst werden. Zum Bestimmen von nicht-orthogonalen Koppel- und Eigeninduktivitäten wird diese teilanalytische Lösung über die weiteren vier Integrationsgebiete numerisch integriert. Eine detaillierte Beschreibung ist früheren Veröffentlichungen [122, 123] zu entnehmen. Hier ist beispielhaft anhand der Koppelinduktivität der nicht-orthogonalen Formulierung – definiert in (3.36b) – die Identifikation der Filamentenlösung durch

$$L_{mn} = \frac{\mu_0}{16} \underbrace{\int_b \int_c \int_{b'} \int_{c'} \int_a \int_{a'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') h_a h'_a (\vec{e}_a \cdot \vec{e}'_a) da' da dc' db' dc db}_{\equiv L_{mn}^{\text{Fil}}} \quad (3.48)$$

gezeigt. Die Lösung der vierfachen numerische Integration der Filamentenlösung in (3.48) wird im Folgenden mit L_{mn}^{Num} bzw. L_{mn}^{Num} bezeichnet, wobei die Indizes

Tabelle 3.3.: Übersicht der genutzten analytischen Lösungen.

	Geometrie	Lösung	Verweis
Induktivität		Filamentenlösung L_{mn}^{Fil}	Anhang A.1, (A.2) bzw. [82]
		Eigeninduktivität L_{mm}^{Eig}	Anhang A.1, (A.3) bzw. [32]
		Parallele Kopplung L_{mn}^{Par}	Anhang A.1, (A.4) bzw. [32]
Potentialkoeffizient		Rechteck zu Punkt P_{iq}^{Pun}	Anhang A.2, (A.6) bzw. [60, 83, 84]
		Senkrechte Rechtecke P_{iq}^{Ort}	Anhang A.2, (A.8) bzw. [5]
		Parallele Rechtecke P_{iq}^{Par}	Anhang A.2, (A.7) bzw. [5]
MagPEEC		Filament zu Punkt \vec{B}_u^{Fil}	Anhang A.3, (A.10a) bzw. [85, 86]
		Rechteck zu Punkt \vec{B}_u^{Rec}	Anhang A.3, (A.11) bzw. [86, Gl. (8)]
		Quader zu Punkt \vec{B}_n^{Qua}	Anhang A.3, (A.12) bzw. [86, Gl. (10)]

darstellen, ob eine Koppel- oder Eigeninduktivität zu Grunde liegt. Bei der Bestimmung der Eigeninduktivität L_{mm}^{Num} entstehen weitere Herausforderungen, welche in [122, 123] detailliert vorgestellt sind.

Die Integralkerne der Gleichungen (3.37b) und (3.38b) entsprechen denen des Biot-Savart-Gesetzes (vgl. [11, Kap. 5.2]), wodurch sich eine anschauliche Darstellung ergibt. Die resultierende magnetischen Flussdichte einer stromdurchflossenen Zelle wird über die Oberfläche einer zweiten Zelle integriert. Die analytischen Lösungen einer magnetischen Flussdichte an einem beliebigen Punkt im Raum hervorgerufen durch ein stromdurchflossenes Filament \vec{B}_u^{Fil} , eines Rechtecks \vec{B}_u^{Rec} und eines Quaders \vec{B}_n^{Qua} sind in [85, 86] zu finden und ergeben somit teilanalytische Lösungen der integralen Ausdrücke (3.37b) und (3.38b). Diese können durch

$$T_{vu}^{\mu} = \frac{1}{4} \int_a \int_b \vec{e}_a \cdot \underbrace{\int_{b'} \int_{a'} h_a h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a da' db' \times \vec{n}}_{\cong \vec{B}_u^{\text{Fil}}} da db, \quad (3.49)$$

$$T_{vu}^{\mu} = \frac{1}{4} \int_a \int_b \vec{e}_a \cdot \underbrace{\int_{a'} \int_{b'} h_a h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a da' db' \times \vec{n}}_{\cong \vec{B}_u^{\text{Rec}}} da db, \quad (3.50)$$

$$T_{un}^{\kappa\mu} = \frac{1}{8} \int_a \int_b \vec{e}_a \cdot \underbrace{\int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} h_a h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a da' db' dc' \times \vec{n}}_{\cong \vec{B}_n^{\text{Qua}}} da db. \quad (3.51)$$

identifiziert werden, wobei jeweils die Zellgeometrie der analytisch gelösten Integrationsgebiete orthogonal sein muss und die Indizierung mittels „u“ bzw. „n“ auf dem Index des gelösten Gebiets basiert. Es sei hier darauf hingewiesen, dass die teilanalytischen Lösungen der magnetischen Flussdichte vektoriell sind und erst im Skalarprodukt mit dem Richtungsvektor \vec{e}_a während der numerischen Integration zu einem skalaren Wert resultieren.

Multifunktions-PEEC

Alle bisher beschriebenen Verfahren der Bestimmung der Matrixeinträge der Systemmatrix der MagPEEC-Methode wurden für ein Rechenprogramm implementiert und alle Kopplungen werden im Vorfeld hinsichtlich der geometrischen Lage der Zellen zueinander untersucht. Diese Vorgehensweise ist in der Literatur unter der Bezeichnung Mehrfunktions-PEEC (*engl. Multifunction-PEEC*) bekannt [21, 70], wobei die hier beschriebenen Abläufe hinsichtlich der in Kapitel 4 untersuchten

praktischen Beispiele optimiert sind.

In Abbildung 3.9 ist ein Ablaufdiagramm zur Bestimmung der jeweils effizientesten Funktion für die Berechnung der induktiven Kopplung L_{mn} in einer Umgebung mit orthogonalen und nicht-orthogonalen Zellen dargestellt. Dahingegen ist in Abbildung 3.10 zusätzlich ein Ablaufdiagramm für die Auswahl der Funktionen für die Berechnung der Kopplung der Oberflächenzellen T_{vu}^μ visualisiert. Diese Diagramme sind als Zusammenfassung aller beschriebenen Zusammenhänge dieses Abschnitts zu interpretieren. Für die effiziente Bestimmung der restlichen Einträge der Systemmatrix werden ähnliche Vorgehensweisen durchgeführt. Diese lassen sich jedoch direkt aus den in Abbildung 3.9 und in Abbildung 3.10 dargestellten Ablaufdiagrammen ableiten und werden nicht detailliert vorgestellt.

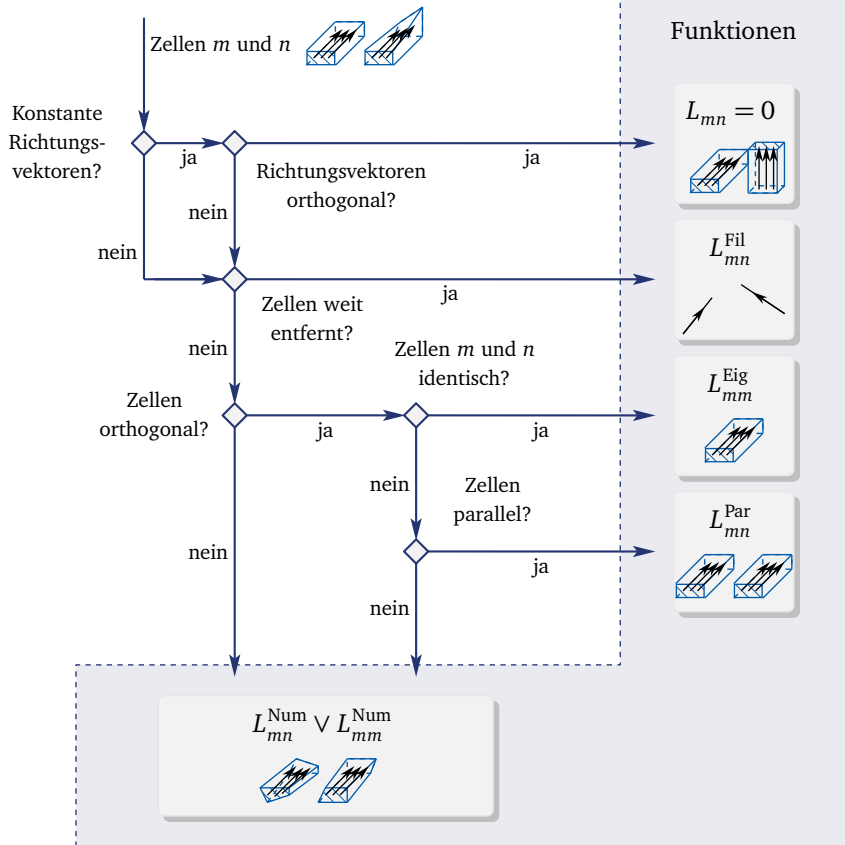


Abbildung 3.9.: Ablaufdiagramm zur Bestimmung der partiellen Induktivitäten L_{mn} in einer gemischten Problemstellung mit orthogonalen und nicht-orthogonalen Zellgeometrien. Es wird jeweils die numerisch günstigste Lösung anhand von Voruntersuchungen gewählt, sodass sich eine möglichst kurze Simulationszeit ergibt.

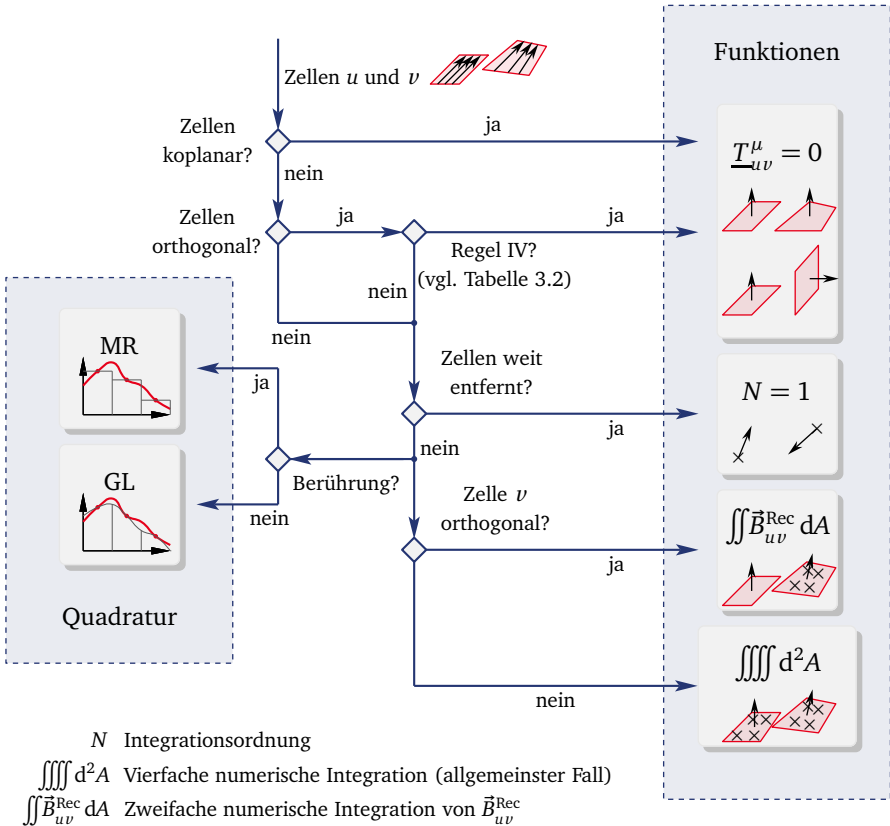


Abbildung 3.10.: Ablaufdiagramm zur Bestimmung der Kopplung T_{vu}^μ zweier Oberflächenzellen der MagPEEC-Methode in einer gemischten Problemstellung von orthogonalen und nicht-orthogonalen Zellgeometrien. Es wird jeweils die numerisch günstigste Lösung anhand von Voruntersuchungen gewählt, sodass sich eine möglichst kurze Simulationszeit ergibt. Zusätzlich zu den unterschiedlichen Funktionen auf der rechten Seite ist die Auswahl einer effizienten Quadratur auf der linken Seite bei berührenden Oberflächenelementen dargestellt.

3.9 Gitter der MagPEEC-Methode

Es werden für die PEEC-Methode die leitenden Strukturen einer Anordnung mit einem Gitter modelliert. Dabei gibt es 1D-, 2D- oder 3D-Gitter, welche eine unterschiedliche Anzahl von Freiheitsgraden zulassen. Im allgemeinsten Fall, wenn die Stromrichtung innerhalb des leitfähigen Gebiets a priori nicht vorherzusagen ist, werden 3D-Gitter genutzt, sodass mindestens drei Freiheitsgrade pro Volumenzelle entstehen. Für solche Anwendungen ist die PEEC- bzw. daraus resultierend die MagPEEC-Methode im Gegensatz zu anderen Methoden nicht besonders effizient, da die Größe der vollen Systemmatrix in (3.24) mit $\mathcal{O}(N^2)$ wächst [21], wobei N der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht. Im Gegensatz dazu werden bei dem Einsatz flächig ausgeführter Leiterplattenstrukturen 2D-Gitter verwendet, wodurch die Raumrichtungen vertikal zulässig sind und horizontal vernachlässigt werden [87]. Die praktischen Anwendungen, welche in Kapitel 4 untersucht sind, basieren dahingegen ausschließlich auf der Verwendung von 1D-Gittern, da für Leiterbahnen auf einer Leiterplatte oder einem Draht die sich einstellende Hauptstromrichtung im Vorfeld bekannt ist. Da sich relativ zu der Länge dieser speziellen Gitterstrukturen eine kleine Querschnittsfläche ergibt, können lange dünne Zellen genutzt und somit eine vergleichsweise geringe Anzahl von Freiheitsgraden erreicht werden. Die dadurch auftretenden, hohen Aspektverhältnisse der einzelnen Zellen zueinander, schränken das Verfahren im Allgemeinen nicht ein, da die in Abschnitt 3.8 beschriebenen geschlossenen bzw. teilanalytischen Lösungen genutzt werden⁷. Um bei 1D-Gittern die frequenzabhängigen Verluste in einem Leiter abzubilden, wird die Querschnittsfläche aufgrund des Skin-Effekts (von engl. *Skin*, Haut) unterteilt. In den folgenden Absätzen werden dieses und die spezielle Modellierung von Ecken detailliert diskutiert.

Grundsätzlich lässt sich das Oberflächengitter an den magnetischen Materialien getrennt von dem Volumengitter der leitfähigen Gebiete erstellen, wodurch eine flexible Gittergenerierung möglich ist. Es lassen sich beispielsweise für die Generierung der Oberflächengitter an magnetischen Materialien externe Gittergeneratoren, wie zum Beispiel SALOME® [88] nutzen, welche eine Vielzahl von Einstellungen für ein Oberflächengitter mit viereckigen Zellen beliebiger Strukturen bieten. Durch die Nutzung der teilanalytischen Lösungen für die Kopplungen der Oberflächenzellen untereinander \underline{T}_{uv}^μ – dargestellt in (3.49) – ergibt sich direkt, dass das Assemblieren der Matrixeinträge auf orthogonalen Gittern mit geringerem numerischen Aufwand als auf nicht-orthogonalen Gittern durchgeführt werden kann. Aufgrund dieses Verhaltens wird bei der Gittergenerierung darauf zu achten, dass

⁷ Im Speziellen sei hier auf die Nutzung der Filamentenlösung, wie in (3.48) dargestellt, verwiesen, da diese der teilanalytischen Lösung über der Länge zweier Volumenzellen entspricht.

möglichst viele orthogonale Zellen genutzt werden. Im Gegensatz zu den Volumengittern der elektrischen Stromdichte sollte hier das Aspektverhältnis gering sein, da bei jeder Kopplung der Oberflächenzellen untereinander numerische Integrationsalgorithmen zum Einsatz kommen (vgl. Abbildung 3.10 auf Seite 73). Sind die langen und dünnen Volumenzellen der elektrischen Stromdichte sehr nahe zu dem magnetischen Material, ergeben sich Konvergenzprobleme der numerischen Integrationsalgorithmen, welche abschließend in diesem Abschnitt beschrieben sind und woraus die Nutzung eines adaptiven Gitters resultiert.

Anmerkungen zu dem dualen Gitter der elektrischen Ladungsdichten sind in Abschnitt 3.3 und Abschnitt 3.8 vorgestellt und für eine detaillierte Beschreibung sei auf weiterführende Literatur [75] verwiesen.

Skin-Effekt Modellierung

Um die frequenzabhängigen Verluste leitender Strukturen korrekt zu modellieren, ist der Skin-Effekt zu beachten, welcher auf den Maxwell'schen Gleichungen (2.1a) und (2.1b) in Verbindung mit dem Ohm'schen Gesetz (2.5) basiert. Die Stromdichte wird aufgrund induzierter Wirbelströme innerhalb der Leiter bei steigender Frequenz nach außen in Richtung der Oberfläche des Leiters gedrängt. Um diesen Effekt mathematisch zu beschreiben, wird typischerweise auf die Skin-Eindringtiefe δ zurückgegriffen. Diese beschreibt die Tiefe, bei der die Amplitude der Stromdichte gegenüber dem Maximum an der Oberfläche auf etwa 37 % abgeklungen ist. Der Zusammenhang

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}, \quad (3.52)$$

wobei μ gleich der absoluten Permeabilität des Leiters ist, lässt sich durch die Nutzung der MQS-Näherung und einen leitfähigen Halbraum herleiten (z. B. [89]).

Es lässt sich direkt ableiten, dass die Stromverteilung im Gleichstromfall homogen ist und die Querschnittsfläche des Leiters nicht unterteilt werden muss. Steigt jedoch die Frequenz, so muss eine inhomogene Stromverteilung betrachtet werden, wobei die Effizienz der numerischen Methode möglichst nicht verloren gehen sollte. Dazu sind in der Literatur viele Ansätze zu finden. Zum Beispiel wird in [58, 90, 91] eine frequenzabhängige Oberflächenimpedanz eingeführt oder die Verluste in [92] nachträglich bestimmt und beachtet. Ein vielversprechender Ansatz ist das Nutzen anderer Basisfunktionen für die elektrische Stromdichte, um den Skin-Effekt mit wenigen Zellen zu modellieren [58]. Eine analytische Bestimmung der frequenzabhängigen Verteilung der elektrischen Stromdichte ist für Kreise und Ellipsen möglich [89], aber für rechteckige Leiterstrukturen im Allgemeinen nicht durchführbar [9].

Ein weiterer Effekt, der bei der Modellierung der elektrischen Stromdichte zu beachten ist, nennt sich Proximity-Effekt (von engl. *Proximity*, Nah) und ergibt eine physikalisch gleich dem Skin-Effekt begründete Stromverdrängung von Leitern, welche nah aneinander liegen. Für die Modellierung dieses Effekts für beliebig angeordnete Leiterstrukturen sind keine analytischen Formulierungen bekannt.

Um diese Effekte numerisch mit der MagPEEC-Methode zu modellieren, wird – wie beispielsweise in [75] gezeigt – der Querschnitt der Leiterstrukturen unterteilt. Damit diese Unterteilung so effizient wie möglich durchgeführt wird, wird ein Skin-Faktor χ eingeführt, welcher das Verhältnis von den Abmessungen der äußeren Zelle zu der nächst inneren Zelle angibt. Damit lässt sich durch [93, Gl. (3.63)]

$$N_w = \left\lceil \frac{2}{\ln(\chi)} \ln \left(\frac{(\chi - 1)w_s + 2\delta_{\max}}{(\chi - 1)\delta_{\max}} \right) + 1 \right\rceil, \quad \text{mit } w_s > 2\delta_{\max} \quad (3.53)$$

die Anzahl der Elemente in der Weite N_w bestimmen, wobei δ_{\max} der maximalen Skin-Eindringtiefe und w_s der Weite eines rechteckigen Leiters entspricht. Die maximale Skin-Eindringtiefe wird in praktischen Anwendungen typischerweise zu $\delta_{\max} = \delta/2$ gesetzt, was auch mit $\delta/2$ -Regel benannt wird. Die Notation $\lceil \cdot \rceil$ in (3.53) ergibt das Aufrunden auf die nächst höhere, ungerade, ganze Zahl, sodass die Querschnittsflächendiskretisierung asymmetrisch ausgeführt wird. Es lässt sich die Anzahl für die Dicke rechteckiger Leiter N_t und die Anzahl für den Radius runder Leiter N_R durch Ersetzen der Weite w_s mit der Dicke t_s bzw. dem Radius R_s bestimmen. Beispielhaft sind jeweils eine Querschnittsflächendiskretisierung eines rechteckigen Leiters in Abbildung 3.11a und eines runden Leiters in Abbildung 3.11b veranschaulicht.

Da der äußerste Umfang der Zylinderstrukturen für die runden Leiter durch ein Polygon approximiert ist, wird der Flächeninhalt systematisch unterschätzt. Um dieses zu Umgehen, werden, wie in Abbildung 3.11b dargestellt, die äußeren Punkte des Polygons soweit nach außen verlegt, sodass die Flächeninhalte des Kreises und des Polygonzugs identisch sind. Die Anzahl der Ringe ist, wie oben beschrieben, mit (3.53) und die Anzahl der Elemente pro Ring sind anhand von Konvergenzanalysen gegenüber analytischen Ausdrücken experimentell bestimmt worden. Diese Untersuchungen sind einer früheren Veröffentlichung [122] zu entnehmen.

Eckendiskretisierung

Da die Richtung der elektrischen Stromdichte dem Leiter folgt, muss auf Ecken, an denen eine Richtungsänderung entsteht, speziell eingegangen werden. Es ergeben sich bei Richtungsänderungen weiche Übergänge der elektrischen Stromdich-

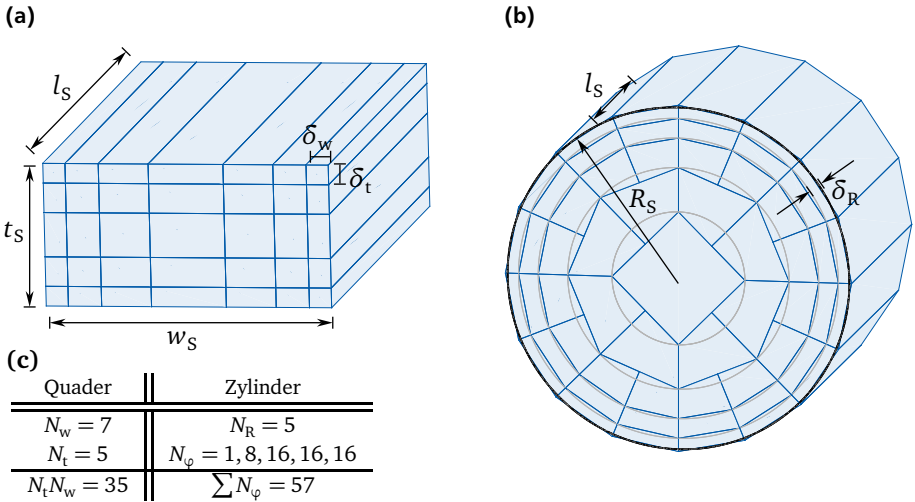


Abbildung 3.11.: Darstellung der Querschnittsflächendiskretisierung leitender Strukturen aufgrund des Skin-Effekts. (a) Diskretisierung eines Quaders beispielsweise für Leiterplattenstrukturen mit 35 orthogonalen Volumenzellen. (b) Diskretisierung eines Zylinders für einen Draht mit 57 nicht-orthogonalen PEEC-Zellen. (c) Übersicht zu den Diskretisierungen.

te, wobei der Betrag dieser an der Innenseite einer Ecke im Regelfall höher als an der Außenseite ist. Gute Ergebnisse werden mit den 2D-Gittern für Leiterplattenstrukturen [75] oder 3D-Gittern für Drähte an Ecken erzielt. Eine detaillierte Beschreibung dieser Diskretisierungen ist [94] zu entnehmen.

Um den numerischen Aufwand zu verringern, werden bei den Untersuchungen der praktischen Beispiele in Kapitel 4 ausschließlich 1D-Gitter verwendet, wobei an Ecken jeweils nur ein Knoten gesetzt wird, welcher mit mehreren Stromzellen verbunden ist (vgl. auch Abschnitt 3.3). Das Gitter der Volumenzellen der elektrischen Stromdichte an diesem Knoten lässt sich nach unterschiedlichen Verfahren erstellen. Beispielhaft seien hier die Verfahren in Abbildung 3.12 für eine 90°-Eckendiskretisierung gezeigt. In Abbildung 3.12a ist eine einfache Form der Eckendiskretisierung dargestellt, wodurch ein Überlappen der Volumenzellen entsteht. Im Gegensatz dazu ist in Abbildung 3.12b und Abbildung 3.12c die Diskretisierung der Ecken ohne Überlappen gezeigt. Dabei sind in Abbildung 3.12b nur orthogonale Zellgeometrien und Abbildung 3.12c auch nicht-orthogonale Zellgeometrien in genutzt. Untersuchungen zeigen, dass

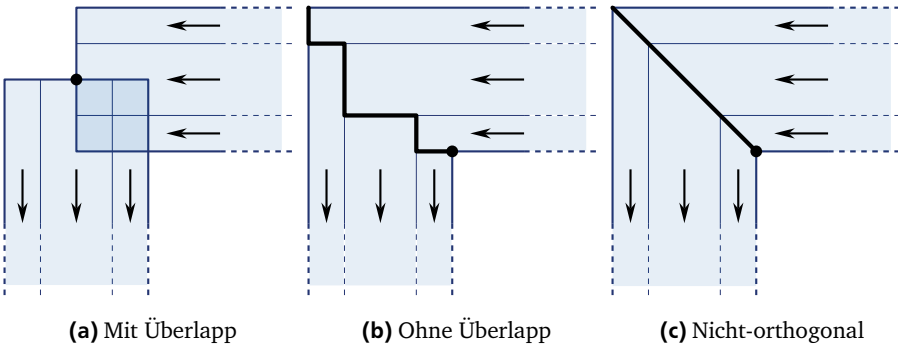


Abbildung 3.12.: Drei Möglichkeiten der 90°-Eckendiskretisierung einer Leiterplattenstruktur mit einem 1D-Gitter.

zumindest bei ausgewählten Beispielen (vgl. Abschnitt 4.2) die Eckendiskretisierung ohne Überlapp in Abbildung 3.12b und die nicht-orthogonale Diskretisierung aus Abbildung 3.12c gute Ergebnisse erzielen, wobei sich diese untereinander kaum unterscheiden. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass sich die Zeit zum Assemblieren der Matrixeinträge für die nicht-orthogonale Diskretisierung gegenüber der orthogonalen Diskretisierung erhöht. Bei der Eckendiskretisierung runder Leiter wird ausschließlich das Verfahren, welches in Abbildung 3.12c visualisiert ist, angewendet. Die Start- und Endflächen der nicht-orthogonalen Volumenzellen werden so verzogen, dass diese exakt auf der Schnittebene beider zylinderförmiger Leiter im dreidimensionalen Raum liegen. Diese Diskretisierung wurde anhand eines praktischen Beispiels in Abschnitt 4.4 evaluiert. In Abbildung 3.13 ist ein modellierter runder Leiter mit zwei 90° Ecken dargestellt. Dabei sind exemplarisch eine horizontale und eine vertikale Eckendiskretisierung gezeigt.

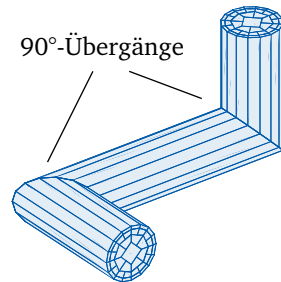


Abbildung 3.13.: 1D-Gitter runder Leiter an 90°-Übergängen.

Adaptives Oberflächengitter

Wie einleitend erwähnt, ist die Kopplung zwischen den Oberflächenzellen und den Volumenzellen, welche nah beieinander sind, mit einer hohen Genauigkeit nur mit

einem hohen Aufwand bei der numerischen Integration zu bestimmen. Aufgrund dessen wird ein adaptives Oberflächengitter eingeführt, wobei im Vorfeld die Lage der Zellen zueinander geprüft und danach eine angepasste Verfeinerung des Oberflächengitters durchgeführt wird. Es sei hier die Kopplung in der letzten Zeile von Tabelle 3.1 auf Seite 47 für orthogonale Zellen

$$T_{un}^{\kappa\mu} = \frac{1}{w_u A_n} \vec{e}_u \cdot \left\{ \int_{S_u} \left(\int_{V'_n} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_n dV' \right) \times \vec{n}_u \right\} dA \quad (3.54)$$

wiederholt.

Um die Herausforderung an die numerische Integration zu beschreiben, ist in Abbildung 3.14 die mit \vec{B}^{Qua} (vgl. Anhang A.3) analytisch bestimmte z -Komponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} einer elektrischen Volumenzelle entlang der x -Achse dargestellt. Ist, wie in Abbildung 3.14 angedeutet, die Oberflächenzelle in Berührung mit der Volumenzelle, wird zum Bestimmen des in (3.54) wiederholten integralen Ausdrucks der in rot dargestellte Funktionswert über die Oberfläche integriert. Der hohe Aufwand der numerischen Integration entsteht im Speziellen durch den ersichtlichen Vorzeichenwechsel in der Symmetrieebene entlang der Längsachse des Volumenelements. Aufgrund dieser Untersuchung ergibt sich direkt, dass durch ein symmetrisches Zerteilen der dargestellten Oberflächenzelle entlang der Längsachse der Volumenzelle der Vorzeichenwechsel im Integrationsgebiet beseitigt werden kann. Trotz einer Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade der magnetischen Oberflächenströme, verringert sich dennoch der gesamte numerische Aufwand. Bei dem lokalen Verfeinern des Gitters werden zusätzlich zu den berührenden Oberflächenzellen weitere Zellen mit einem geringen Abstand zu den Volumenzellen beachtet.

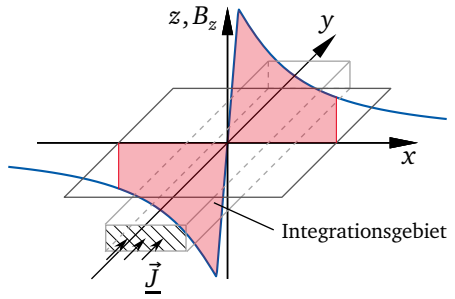


Abbildung 3.14.: Analytisch bestimmte z -Komponente der magnetischen Flussdichte B_z über einer PEEC-Volumenzelle.

Dieses ist anhand eines Beispiels eines rechteckigen Leiters über einer Platte aus magnetischem Material in Abbildung 3.15 dargestellt. Es erschließt sich direkt der weitere Vorteil, dass sich durch das adaptive Gitter eine lokale Verfeinerung an den Stellen bildet, an denen sich typischerweise ein erheblicher Anteil der Änderungen der Magnetisierungsflächenströme ergibt. Somit lässt sich durch diese

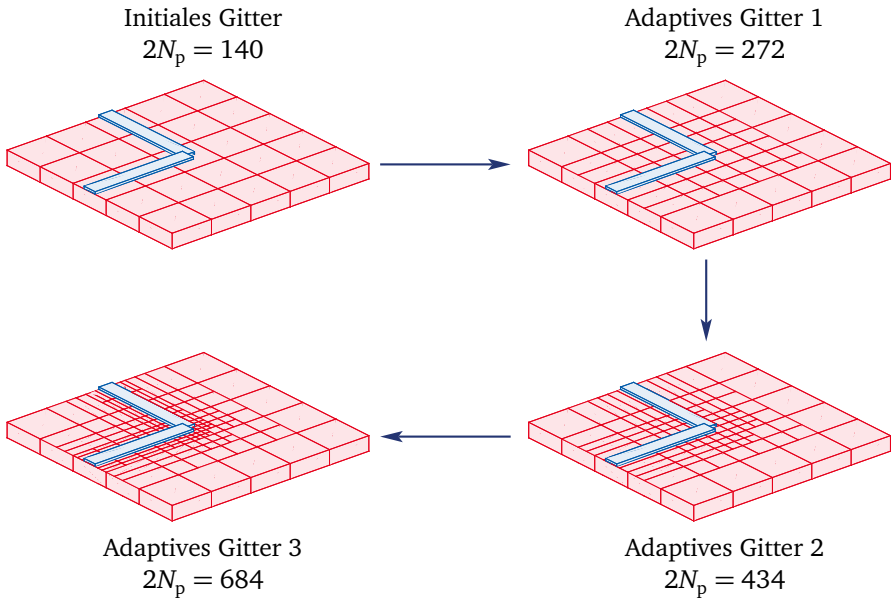


Abbildung 3.15.: Visualisierung des Algorithmus zum Erstellen eines adaptiven Oberflächengitters nahe dem PEEC-Volumengitter an dem Beispiel eines rechteckigen Leiters in Berührung mit einer quadratischen Platte aus magnetischem Material. Es sind drei Durchläufe des Algorithmus gezeigt und die Anzahl der Freiheitsgrade $2N_p$ erhöht sich pro Durchlauf.

Verfeinerung des Gitters die Gesamtgenauigkeit des Verfahrens erhöhen. Eine Konvergenzanalyse anhand der Verfeinerung des adaptiven Gitters über der gesamten Simulationszeit ist in Abschnitt 4.2.4 dargestellt.

3.10 Mehrfach zusammenhängende Gebiete und MagPEEC⁰-Methode

Bei der eingeführten MagPEEC-Methode ergeben sich Nachteile bei der Betrachtung von mehrfach zusammenhängenden Gebieten⁸ als magnetische Materialien, wenn die anregende elektrische Stromdichte durch die Öffnungen dieser Gebiete

⁸ Ein Gebiet heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann. Anderenfalls bezeichnet man es als mehrfach zusammenhängend. [10, S. 123]

geführt ist. Unter diesen Umständen ist typischerweise der Betrag der magnetischen Flussdichte $|\vec{B}|$ innerhalb des Materials linear von der relativen Permeabilität $\underline{\mu}_r$ abhängig, was direkt in einer linearen Abhängigkeit des Betrags der Oberflächenmagnetisierungsströme $|\vec{K}^M|$ von der relativen Permeabilität resultiert. Im Gegensatz dazu ergibt sich typischerweise bei einfach zusammenhängenden Gebieten bei steigender relativen Permeabilität eine maximale magnetische Flussdichte im magnetischen Material, die nicht überschritten wird. Deutlich ist dieses Verhalten an dem Modell des magnetischen Kreises, bei dem geschlossene oder nahezu geschlossene magnetische Gebiete mittels eines Widerstandsnetzwerks modelliert werden [11, 95]. Dabei entspricht die Durchflutung $\underline{\Theta}_1 = \underline{I}_0 N_1$ der eingepprägten magnetischen Spannung, wobei \underline{I}_0 die Stromstärke und N_1 die Anzahl der Ströme ist, die durch die Öffnung des mehrfach zusammenhängenden Gebiets geführt ist. Entsprechend ist die Stromstärke in diesem Netzwerkmodell äquivalent dem magnetischen Fluss, welcher sich innerhalb des magnetischen Materials einstellt. Der magnetische Widerstand ist direkt antiproportional zu der relativen Permeabilität des magnetischen Materials, wodurch sich bei konstant eingepprägter Durchflutung ein proportional von der relativen Permeabilität abhängiger magnetischer Fluss ergibt. Untersucht ist dieses Verhalten in Abschnitt 4.4 anhand eines Ringkerns aus magnetischen Material, welcher einem zweifach zusammenhängendem Gebiet entspricht.

Aufgrund der vorgestellten Zusammenhänge ergibt sich eine numerische Herausforderung bei dem Bestimmen der Magnetisierungsoberflächenströme mittels der MagPEEC-Methode, welche bei ähnlichen Formulierungen hinlänglich bekannt ist [40, 51, 96, 97]. Die Einträge der Matrix \underline{T}_μ , welche in (3.21) den Kopplungen der Oberflächenelemente untereinander entspricht, bestehen aus Haupt- und Nebendiagonalelementen, wobei sich ausschließlich ein Einfluss der relativen Permeabilität auf die Hauptdiagonalelemente einstellt. Die genaue Betrachtung der Hauptdiagonalelemente \underline{T}_{uu}^μ in der vorletzten Zeile der Tabelle 3.1 auf Seite 47 hinsichtlich hoher $\underline{\mu}_r$ lässt sich auf den Ausdruck

$$\lim_{\underline{\mu}_r \rightarrow \infty} \left(\frac{\underline{\mu}_r}{\underline{\mu}_r - 1} \right) = 1 \quad (3.55)$$

reduzieren. Dabei wirkt sich bei relativ hohen Werten für die relative Permeabilität eine Änderung dieser nur in den letzten Nachkommastellen aus. Die ausschließlich von der Geometrie der jeweiligen Oberflächenelementen abhängigen Nebendiagonalelemente T_{vu}^μ sind mittels den in Abschnitt 3.8 auf Seite 63 beschriebenen numerischen Integrationsalgorithmen nur bis hin zu einer endlichen Genauigkeit s korrekt bestimmt. Diese Diskrepanz in den letzten Nachkommastellen von den

Neben- und den Hauptdiagonalelementen wird in der Literatur als Auslöschungsfehler bezeichnet [40] und tritt zwar auch bei einfach geschlossenen Gebieten auf, hat aber nur bei mehrfach geschlossenen Gebieten Einfluss auf die Genauigkeit des Gesamtergebnisses.

In der Literatur sind einige Möglichkeiten zum Beheben dieser Auslöschungsfehler beschrieben [51, 96], wohingegen im Rahmen dieser Arbeit eine weitere Möglichkeit vorgestellt wird, die im Speziellen für einfache Geometrien der magnetischen Materialien effizient ist. Dabei muss die Voraussetzung erfüllt sein, dass bei magnetischen Materialien eines mehrfach geschlossenen Gebiets die Magnetisierung und damit die Magnetisierungsoberflächenstromdichte ausschließlich von der Durchflutung $\underline{\mathcal{Q}}_l$ des magnetischen Gebiets und nicht von der Lage der elektrischen Stromdichte im Raum abhängt⁹. Lässt sich demnach eine konstante Magnetisierung \vec{M}_0 des magnetischen Materials in Abhängigkeit der Durchflutung $\underline{\mathcal{Q}}_l$ angeben, können direkt mit

$$\vec{K}_0^M(\underline{\mathcal{Q}}_l) = \vec{M}_0(\underline{\mathcal{Q}}_l) \times \vec{n} \quad (3.56)$$

und

$$\underline{I}_\nu^{M0}(\underline{\mathcal{Q}}_l) = \frac{1}{w_\nu} \int_{S_\nu} \vec{e}_\nu \cdot \vec{K}_0^M(\underline{\mathcal{Q}}_l) dA \quad (3.57)$$

bei orthogonalen Oberflächenelementen die eingepprägten Magnetisierungsoberflächenströme \underline{I}_ν^{M0} in Abhängigkeit von der Durchflutung bestimmt werden. Diese konstanten Magnetisierungsoberflächenströme können dann mittels

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\top & -j\omega\mathbf{C}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_b \\ -\underline{\varphi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_s - j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa}\underline{\mathbf{i}}_{p0}(\underline{\mathcal{Q}}_l) \\ \underline{\mathbf{i}}_s \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

als zusätzliche Anregung der klassischen PEEC-Methode eingepprägt werden. Dabei ist der Vektor der konstanten Magnetisierungsoberflächenströme $\underline{\mathbf{i}}_{p0}$ von der Größe $2N_p \times 1$. Der Vorteil dieser Formulierung, dass die Matrix $\underline{\mathbf{T}}_\mu$ in (3.58) nicht existiert und die oben beschriebenen Auslöschungsfehler damit nicht auftreten, ist direkt ersichtlich. Die Nutzung von (3.58), welche im Speziellen in Abschnitt 4.4 untersucht ist, wird in Abgrenzung zu der MagPEEC-Methode im Folgenden als MagPEEC⁰-Methode bezeichnet.

Der Nachteil dieser Formulierung ist, dass die nur von der Durchflutung abhängige Magnetisierung \vec{M}_0 bekannt sein muss. Dieses ist nur bei ausgewählten

⁹ Diese Annahme wird im Regelfall auch bei dem Modell des magnetischen Kreises ausgenutzt [11].

Anwendungen der Fall. Als Beispiel sei hier auf eine durchflutete Ringgeometrie verwiesen, bei welcher eine analytische Lösung der Magnetisierung konstruiert werden kann. In Abschnitt 4.4 ist dieses Verfahren anhand eines akademischen und eines praktischen Beispiels mit einer Ringgeometrie des magnetischen Materials untersucht. Bei der Untersuchung weiterer Geometrien könnte auf andere numerische Verfahren zur Bestimmung der konstanten Magnetisierung ausgewichen und diese wiederum mit (3.58) eingepreßt werden.

3.11 MQS-MagPEEC-Methode

In diesem Abschnitt wird die MQS-MagPEEC-Methode als Vereinfachung der allgemeinen MagPEEC-Methode vorgestellt. Diese Formulierung basiert auf der MQS-Näherung, welche in Abschnitt 2.5.2 eingeführt ist. Das zugrunde liegende System der MagPEEC-Methode in (3.1), welches auf den Näherungen der erweiterten Quasistatik basiert, reduziert sich in der Magnetoquasistatik zu

$$\frac{\underline{\vec{J}}^C(\vec{r})}{\kappa(\vec{r})} + j\omega\underline{\vec{A}}(\vec{r}) + \text{grad}\underline{\Phi}(\vec{r}) = 0, \quad (3.59a)$$

$$\text{div}\underline{\vec{J}}^C(\vec{r}) = 0, \quad (3.59b)$$

$$\frac{\underline{\mu}_r}{1 - \underline{\mu}_r} \mu_0 \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}) + \text{rot}\underline{\vec{A}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{n}}(\vec{r}) = 0. \quad (3.59c)$$

Dabei ist die in Kapitel 2 eingeführte Indizierung „MQS“ aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht mitgeführt. Das magnetische Vektorpotential sowie die Wirbel des magnetischen Vektorpotentials auf der Oberfläche des magnetischen Materials ergeben sich zu

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \mu_0 \int_{V'} \underline{\vec{J}}^C(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \mu_0 \int_{S'} \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}') \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') dA' \quad (3.60a)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\underline{\vec{A}}(\vec{r}) \times \underline{\vec{n}} &= \frac{\mu_0 \underline{\vec{K}}^M(\vec{r})}{2} + \mu_0 \int_{V'} \text{grad}\widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \underline{\vec{J}}^C(\vec{r}') dV' \times \underline{\vec{n}} + \\ &+ \mu_0 \int_{S'} \text{grad}\widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \underline{\vec{K}}^M(\vec{r}') dA' \times \underline{\vec{n}}. \end{aligned} \quad (3.60b)$$

Basierend auf (3.59) und (3.60) ergibt sich mit der Durchführung der in Abschnitt 3.1 detailliert beschriebenen Diskretisierung folgendes Matrixsystem für die MQS-MagPEEC-Methode

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & \mathbf{A} & j\omega\mathbf{L}_{\mu\kappa} \\ \mathbf{A}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{\kappa\mu} & \mathbf{0} & \underline{\mathbf{T}}_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}}_b \\ -\underline{\varphi}_n \\ \underline{\mathbf{i}}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_s \\ \underline{\mathbf{i}}_s \\ -\underline{\mathbf{i}}_{p0} \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

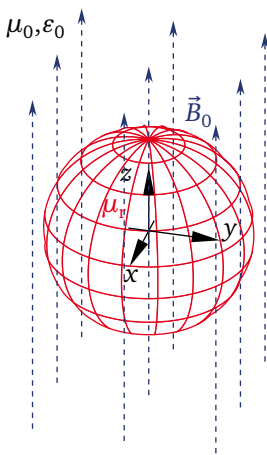
wobei im Vergleich zu dem System der MagPEEC-Methode (3.21) die Matrix der Kurzschlusskapazitäten \mathbf{C}_s verschwindet. Aufgrund dessen wird typischerweise ein Netzwerkknoten als Referenzknoten definiert [63], worauf alle Knotenpotentiale bezogen sind. Im Folgenden ist zur Unterscheidung der zu Grunde liegenden Approximation der Maxwell'schen Gleichungen die Benennungen QS-MagPEEC-Methode und MQS-MagPEEC-Methode bzw. MQS-MagPEEC⁰-Methode gewählt.

4 Simulationsergebnisse und Messungen

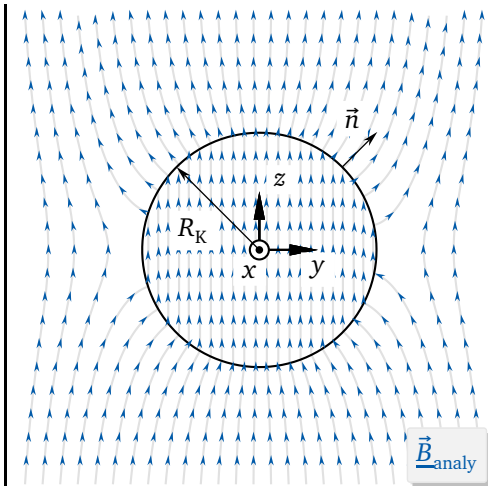
In diesem Kapitel wird die Anwendung der in Kapitel 3 vorgestellten Implementierung der MagPEEC-Methode und den eingeführten Variationen anhand von Beispielen untersucht. Die numerisch gewonnenen Ergebnisse werden mit analytischen Ausdrücken, Ergebnissen der 2D-FEM, der 3D-FEM und Messungen evaluiert. Dabei werden zum einen rein akademische Beispiele und zum anderen praktisch relevante Beispiele unterschiedlicher passiver Bauteile untersucht. Nachdem der Einsatz der MagPEEC-Methode anhand einer Kugel aus magnetischem Material in einem homogenen Magnetfeld und eine Leiterplattenspule über einer quadratischen Platte aus magnetischem Material analysiert ist, werden ein Leiterplattentransformator und eine Drossel als in der Praxis relevante Beispiele betrachtet. Dabei werden im Einzelnen die Unterschiede der in Kapitel 3 eingeführten Varianten MQS-MagPEEC-, QS-MagPEEC- und die MQS-MagPEEC⁰-Methode detailliert herausgearbeitet und jeweils in Abhängigkeit der Beispiele angewendet und evaluiert.

4.1 Magnetische Kugel im homogenen Magnetfeld

Die in Kapitel 3 beschriebene MagPEEC-Methode ergibt sich aus einer gekoppelten Formulierung einer Volumen- und einer Oberflächenintegraldarstellung. Die beiden Anteile sind in dem QS-MagPEEC-System in (3.21) auf Seite 50 farblich gekennzeichnet, wobei in diesem Abschnitt vorbereitend auf die folgenden Beispiele die Implementierung des in (3.21) rot markierten Bereichs, welches der Oberflächenintegraldarstellung an den magnetischen Materialien entspricht, untersucht wird. Dazu wird eine Kugel aus einem linearen und isotropen magnetischen Material, welches eine hohe relative Permeabilität aufweist, in einer homogenen magnetischen Flussdichte betrachtet. Der Grund für die Auswahl dieses Beispiels ist die Existenz einer analytischen Lösung des zu Grunde liegenden dreidimensionalen Feldproblems, welche in grundlegender Literatur [14] zu finden ist.



(a) Geometrie



(b) Magnetische Flussdichte

Abbildung 4.1.: (a) Dreidimensionale Darstellung der Geometrie der Kugel in einer homogenen magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 in z -Richtung. (b) Darstellung der analytischen Lösung der magnetischen Flussdichte nach (4.1) in der Ebene $x=0$.

4.1.1 Analytische Lösung

Eine Kugel mit dem Radius R_K sei, wie in Abbildung 4.1a dargestellt, aus einem linearen und isotropen magnetischen Material mit der relativen Permeabilität μ_r im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gegeben. Ist \vec{B}_0 eine eingeprägte, homogene magnetische Flussdichte, so ist die resultierende magnetische Flussdichte im ganzen Raum $\vec{B}(\vec{r})$ durch [14]

$$\vec{B}(r \geq R_K) = \vec{B}_0 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R_K^3}{r^3} (3(\vec{B}_0 \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{B}_0), \quad (4.1a)$$

$$\vec{B}(r < R_K) = \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \vec{B}_0 \quad (4.1b)$$

gegeben. Dabei ist $r = |\vec{r}|$ der Betrag des Aufpunkts der Flussdichte und \vec{n} der Oberflächennormalenvektor der Kugel. Dieser Zusammenhang lässt sich aus einer Überlagerung eines Dipolfelds im Außenraum mit einer homogenen Flussdichte im Inneren der Kugel in Kugelkoordinaten herleiten und in die kompakte Schreibwei-

se (4.1) überführen. Bei einer hohen relativen Permeabilität der Kugel ergibt sich durch die Grenzwertbildung des Ausdrucks (4.1b)

$$\lim_{\mu_r \rightarrow \infty} \vec{B}(r < R_K) = 3\vec{B}_0 \quad (4.2)$$

eine dreifache magnetische Flussdichte $\vec{B}(r < R_K)$ gegenüber der anregenden magnetischen Flussdichte \vec{B}_0 im inneren der Kugel. Der resultierende Faktor wird typischerweise Demagnetisierungsfaktor genannt [98] und ist ausschließlich von der Geometrie des magnetischen Materials abhängig. Die mittels (4.1) bestimmte magnetische Flussdichte in einer zweidimensionalen Fläche ($x = 0$) durch den Mittelpunkt der im kartesischen Koordinatensystem zentrierten Kugel ist in Abbildung 4.1b dargestellt und wird im Folgenden mit \vec{B}_{analy} bezeichnet.

4.1.2 Lösung mittels der MagPEEC-Methode

Die in Abschnitt 4.1.1 dargestellte Lösung der magnetischen Flussdichte \vec{B}_{analy} wird, wie einleitend beschrieben, mit Anteil der Oberflächenintegraldarstellung der MagPEEC-Methode an magnetischen Materialien, welcher in (3.21) rot gekennzeichnet ist, verglichen. Dazu wird ein dreidimensionales aus nicht-orthogonalen Zellen bestehendes Oberflächengitter der Kugel erstellt, welches in Abbildung 4.2 dargestellt ist. Dabei ist zu beachten, dass die Einschränkung auf planare Oberflächenelemente basierend auf den Ausführungen in Abschnitt 3.8 auf Seite 63 gefordert ist und demnach die Deckelflächen der Kugel durch eine planare Oberfläche approximiert werden müssen. Bei der Erhöhung der Anzahl der Oberflächenelemente der Kugel werden diese Flächen jedoch kleiner und drücken sich weiter nach außen, so dass sich das unterschätzte Volumen verringert. Untersuchungen zeigen, dass sich dadurch ein zunehmend geringerer Fehler ergibt und dieser somit vernachlässigt werden kann. Die Anregung ist hier durch eine äußere eingeprägte magnetische Flussdichte \vec{B}_0 gegeben, wodurch ein Anregungsvektor \mathbf{i}_{p0} nach (3.39) auf Seite 59 auf der rechten Seite des in (3.21) rot gekennzeichneten Systems existiert und sich somit die Magnetisierungsoberflächenströme durch

$$\mathbf{i}_p = -\mathbf{T}_\mu^{-1} \mathbf{i}_{p0} \quad (4.3)$$

bestimmen lassen.

Das Ergebnis der Oberflächenstromdichte ist auf zwei Oberflächengittern in Abbildung 4.2 dargestellt. Dabei stellt die Farbe der Oberflächenelemente den normierten Betrag und die angedeuteten Vektoren auf den Oberflächen die Richtung der Magnetisierungsoberflächenstromdichte dar. Um das physikalische Verhalten

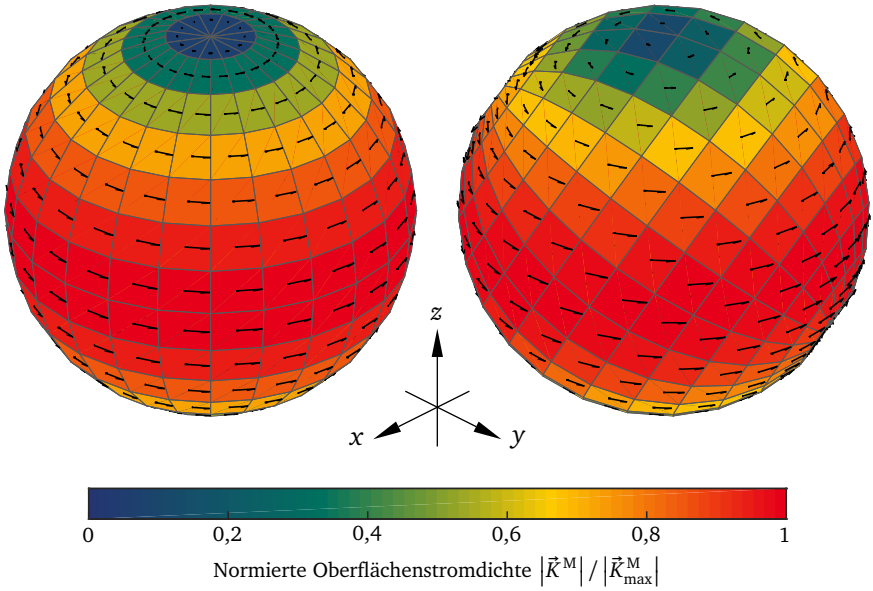


Abbildung 4.2.: Darstellung der magnetischen Oberflächenstromdichte auf zwei Kugeln aus magnetischem Material in einem homogenen Magnetfeld in z -Richtung. Die Anzahl der Oberflächelemente und der Freiheitsgrade sind jeweils $N_p = 312$ bzw. $2N_p = 624$. Die Oberflächenstromdichte wird pro Oberflächelement durch Superposition beider Freiheitsgrade berechnet. Der normierte Betrag ist farblich und die Richtung als Vektor der jeweiligen Oberflächelemente dargestellt.

der Oberflächenströme übersichtlich zu erfassen, sind die einzelnen Ergebnisse pro Oberflächelement als Superposition beider orthogonal zueinander stehenden Freiheitsgraden dargestellt. Die Ergebnisse der Magnetisierungsoberflächenstromdichte sind in Abbildung 4.2 anhand von zwei unterschiedlich gedrehten Oberflächengittern der Kugel dargestellt, wobei die anregenden homogene Flussdichte jeweils in z -Richtung definiert ist. Es ist deutlich, dass auch ein verdrehtes Gitter auf der rechten Seite in Abbildung 4.2 qualitativ die selben Ergebnisse für die Magnetisierungsoberflächenstromdichte liefert. Die im folgenden Abschnitt 4.1.3 untersuchte Konvergenz ist anhand des auf der linken Seite dargestellten Gitters untersucht, obwohl Ergebnisse basierend auf dem rechten Gitter gegenüber den in Abbildung 4.4 dargestellten Ergebnissen kaum abweichen.

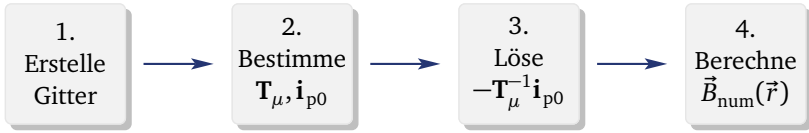


Abbildung 4.3.: Übersicht zur Bestimmung der numerischen Lösung des Feldproblems der magnetischen Kugel im homogenen Magnetfeld.

Im Anschluss an die Bestimmung der magnetischen Oberflächenströme \mathbf{i}_p als Freiheitsgrade auf den Zellen des Gitters wird die magnetische Flussdichte im gesamten Raum als Überlagerung des Felds der magnetischen Oberflächenströme und der anregenden Flussdichte \vec{B}_0 mit

$$\vec{B}_{\text{num}}(\vec{r}) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}(\vec{r}, \mathbf{i}_p) \quad (4.4)$$

bestimmt. Die magnetische Flussdichte resultierend aus den magnetischen Oberflächenströmen $\vec{B}(\vec{r}, \mathbf{i}_p)$ wird durch die Anwendung der im Anhang A.3 dargestellten analytischen Formulierung (A.10a) bestimmt. Da zur Diskretisierung der Kugeloberfläche planare, nicht-orthogonale Oberflächenzellen genutzt sind, kann die Lösung der magnetische Flussdichte eines Filaments im Raum \vec{B}_u^{Fil} , wie in Abschnitt 3.8 beschrieben, in einer Dimension numerisch integriert. Die einzelnen Schritte zur Bestimmung der numerischen Lösung sind in Abbildung 4.3 aus Gründen der Übersichtlichkeit visualisiert.

4.1.3 Vergleich der Lösungen

Die analytisch und numerisch gewonnene magnetische Flussdichte wird in einem dreidimensionalen, kartesischen Gitter mit N_G^3 Punkten in den Grenzen p_{\min} und p_{\max} mit $p = x, y, z$ ausgewertet. Die Material-, Feld- und Geometrieparameter der Anordnung sind in Tabelle 4.1 gegeben und ein homogenes, anregendes Feld in z-Richtung $\vec{B}_0 = B_{0,z} \vec{e}_z$ wird angenommen. In allen N_G^3 Aufpunkten \vec{r} wird die Abweichung zwischen der numerischen und analytischen Flussdichte $\vec{B}_{\text{num}} - \vec{B}_{\text{analy}}$ bestimmt. Dabei sind die Punkte gleichmäßig dreidimensional in diesem durch p_{\min} und p_{\max} beschränkten Gebiet verteilt, wobei die Kugel vollständig eingeschlossen ist ($R_K > |p_{\min}| \wedge R_K < |p_{\max}|$) und somit Auswertepunkte innerhalb und außerhalb der Kugel existieren. Es ist darauf zu achten, dass die Auswertepunkte bei der Bestimmung der Flussdichte auf Basis der Oberflächenströme \mathbf{i}_p hinreichend weit

Name	Wert
R_K	100 mm
μ_r	1.000
$B_{0,z}$	$1 \mu\text{T}$
$[p_{\min}; p_{\max}]$	$[-200; 200]$
N_G	6

Tabelle 4.1.: Gewählte Parameter für das Beispiel einer Kugel aus magnetischem Material μ_r mit dem Radius R_K in einer homogenen magnetischen Flussdichte in z-Richtung $\vec{B}_0 = B_{0,z} \vec{e}_z$. Die Anordnung ist in Abbildung 4.1 dargestellt und die Grenzen p_{\min} und p_{\max} ergeben ein dreidimensionales Gitter mit N_G Aufpunkten pro Richtung ($p = x, y, z$).

entfernt von der Kugeloberfläche sind, da der analytische Ausdruck (A.10a) eines Filaments in der Nähe singular und somit unphysikalisch wird.

Als Fehlernorm wird die Energienorm oder L^2 -Norm¹ genutzt, da diese Auskunft über die gemittelte Genauigkeit im gesamten Gitter ergibt. Die numerische Lösung \vec{B}_{num} wird bei unterschiedlich feinen Oberflächengittern der Kugel nach dem in Abschnitt 4.1.2 dargestellten Verfahren erzeugt und der Fehler im Gitter mit den Grenzen $[p_{\min}, p_{\max}]$ mittels der L^2 -Norm bestimmt. Das Resultat ist eine Konvergenzanalyse, die unter der Voraussetzung der korrekten Anwendung des numerischen Verfahrens mit feinerem Gitter einen geringeren Fehler bezogen auf die analytischen Referenzlösung aufweisen sollte. Bei einer doppelt logarithmischen Darstellung ergibt sich idealerweise eine Gerade, dessen Steigung der Konvergenzordnung entspricht. Nach einer Angabe aus [99] ist für dieses Beispiel unter Anwendung eines solchen numerischen Verfahrens eine unabhängig von der Fehlernorm maximale Konvergenzordnung von eins zu erreichen. Da das Oberflächengitter in diesem Beispiel ausschließlich aus nicht-orthogonalen Zellen besteht, wird zum Assemblieren der Matrixeinträge die vierfache numerische Integration aus (3.37b) genutzt, wobei die Einträge der resultierenden Matrix \mathbf{T}_μ nicht null bis auf eine geringe Anzahl der Kopplungen zwischen den Oberflächenzellen der oben und unten abschließenden Flächen sind (siehe auch Abschnitt 3.8 auf Seite 63).

4.1.4 Ergebnisse

In Abbildung 4.4 sind die Simulationsergebnisse zusammengefasst dargestellt. Zum einen ist in Abbildung 4.4a die in Abschnitt 4.1.3 beschriebene Konvergenzanalyse und zum anderen ist in Abbildung 4.4b der Fehler gegenüber der benötigten Simulationszeit T_{Sim} dargestellt. Es ist zu beachten, dass die durchgeführten Simulationen, welche jeweils einem Punkt auf dem Graphen entsprechen, in beiden

¹ Definition der Energienorm: $\|\vec{x}\|_2 = |\vec{x}| := (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$.

Darstellungen identisch sind und dadurch die Möglichkeit besteht, die Entwicklung der Genauigkeit gegenüber der Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade und die dazugehörige Simulationszeit direkt zu vergleichen. Die dargestellte Simulationszeit T_{Sim} ist die benötigte Zeit um alle vier in Abbildung 4.3 dargestellten Berechnungsschritte durchzuführen, wobei ein Computer mit einer 64 Bit Architektur, 120 GB RAM und einem 2,66 GHz Dual-Core Prozessor genutzt ist.

Alle Simulationen sind mit den Integrationsordnungen $N = 1$ bzw. $N = 3$ sowie dem in Algorithmus 1 auf Seite 67 dargestellten iterativen Verfahren der Wahl der Integrationsordnung mit einem Abstandsverhältnis – definiert in (3.47) – von $\alpha = \infty$ und $\alpha = 100$ durchgeführt, damit die Effizienz, was hier Geschwindigkeit unter Berücksichtigung der Genauigkeit bedeutet, der implementierten Methode genauer untersucht werden kann. Die angegebenen Integrationsordnungen werden jeweils für das Assemblieren der Matrixeinträge \mathbf{T}_μ und \mathbf{i}_{p0} und für die anschließende numerische Berechnung der magnetischen Flussdichte basierend auf den magnetischen Oberflächenströmen $\vec{B}(\mathbf{i}_p)$ eingesetzt. Bei der iterativen Wahl der Integrationsordnung und einem Abstandsverhältnis $\alpha = \infty$ werden alle Matrixeinträge von \mathbf{T}_μ iterativ bestimmt, wohingegen bei der Wahl von $\alpha = 100$ in Abhängigkeit des Gitters in etwa 2 % bis 15 % mit der Integrationsordnung $N = 1$ ausgewertet werden.

Bei der Integrationsordnung $N = 1$ ist ein deutliches Einbrechen der maximalen Konvergenzordnung zu erkennen und es lässt sich daraus ableiten, dass die Genauigkeit der Matrixeinträge nicht ausreichend gegenüber der Gesamtgenauigkeit des Ergebnisses ist. Nutzt man hingegen eine Integrationsordnung von $N = 3$ so ergibt sich annähernd eine Konvergenzordnung von eins, was in Abbildung 4.4a durch den Vergleich der Steigung der Kurve mit dem Konvergenzdreieck zu erkennen ist. Bei dem iterativen Verfahren zur Wahl der Integrationsordnung und somit der Nutzung unterschiedlicher Ordnungen in Abhängigkeit von dem eigenen inkrementellen Fehler des Matrixeintrags resultiert ähnliches Verhalten, obwohl nur teilweise Matrixeinträge mit hohen Ordnungen gerechnet werden. Bei der Einführung eines Abstandsverhältnisses bricht die Konvergenzordnung wieder ein, wobei die Steigung mit der Wahl des Abstandsverhältnisses eingestellt werden kann.

Die Simulationszeiten T_{Sim} in Abbildung 4.4b ergeben in Verbindung mit der Konvergenzanalyse einen Überblick über die Effizienz der Methode. Die Simulationszeit ist in jedem Punkt um ein vielfaches höher, wenn die Integrationsordnung von $N = 3$ gegenüber der Integrationsordnung $N = 1$ genutzt wird. Dahingegen liegt die Kurve der iterativen Wahl der Integrationsordnung im Bereich von höheren Fehlern zwischen den beiden Kurven fester Integrationsordnung und bei geringeren Fehlern unter diesen. Somit ergibt sich ein Schnittpunkt der Kurve, welcher zeigt, dass es sinnvoll ist, bei dem Ziel von relativ ungenauen Ergebnissen, die Integrationsordnung $N = 1$ zu wählen, da diese dort am wenigsten Simulationszeit

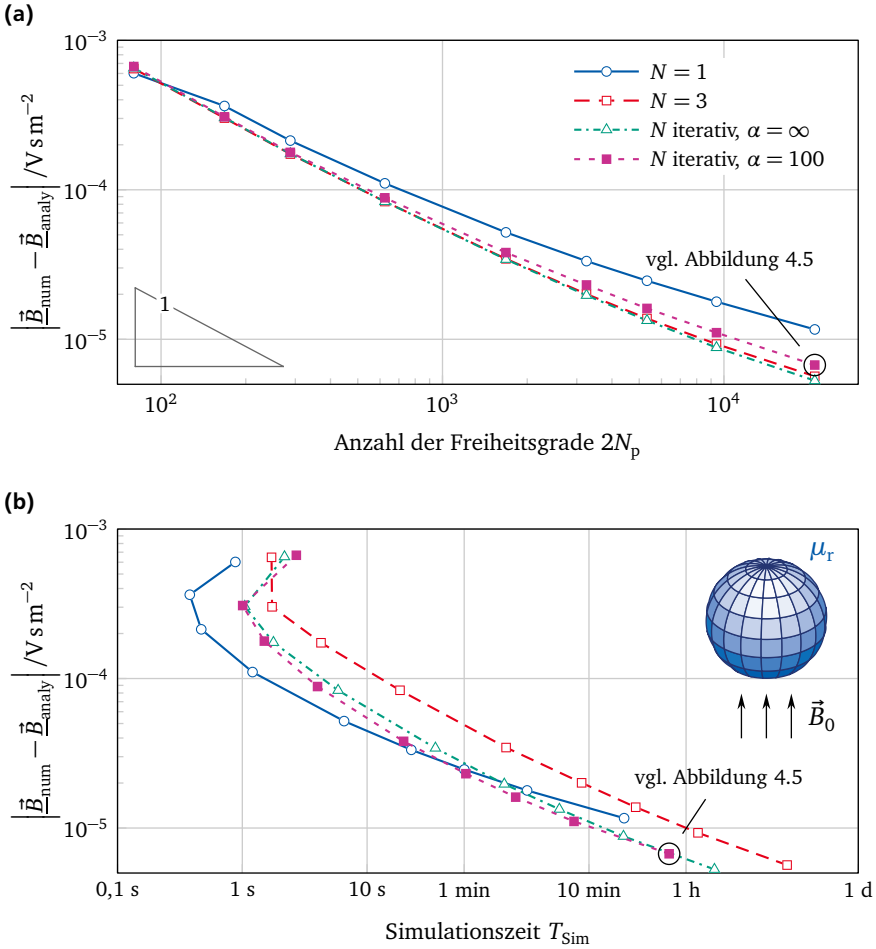


Abbildung 4.4.: Konvergenzanalyse einer Kugel aus magnetischem Material in einem homogenen Magnetfeld. (a) Darstellung des Fehlers über der Anzahl der Freiheitsgrade. (b) Darstellung des Fehlers über der Simulationszeit. Der Fehler ist gegenüber der analytischen Lösung aus (4.1) in N_G^3 äquidistant verteilten Punkten in den Grenzen $[p_{\min}; p_{\max}]$ bestimmt. Ausgewertet sind die Integrationsordnungen $N = 1$, $N = 3$ und das iterative Verfahren der Wahl der Ordnung mit den Abstandsverhältnissen (3.47) $\alpha = \infty$ und $\alpha = 100$.

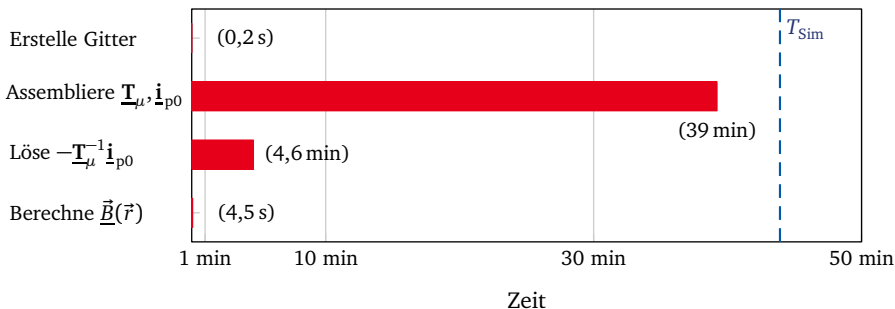


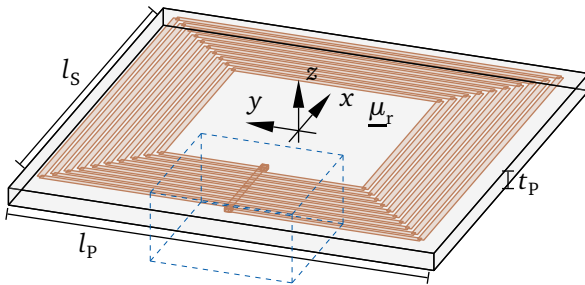
Abbildung 4.5.: Darstellung der Rechenzeiten der in Abbildung 4.3 dargestellten Rechenschritte bei iterativer Wahl der Integrationsordnung N , einem Abstandsverhältnis von $\alpha = 100$ und $2N_p = 21.024$ Freiheitsgraden. Eingeteilt sind die Erstellung eines Oberflächengitters auf der Kugel, das Assemblieren der Matrixeinträge als Lösungen der integralen Ausdrücke, das Lösen des resultierende Gleichungssystems und das Berechnen der magnetischen Flussdichte \vec{B}_{num} auf den N_G^3 Gitterpunkten.

T_{Sim} benötigt. Wenn hingegen eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse gewünscht ist, ist das iterative Verfahren der Wahl der Integrationsordnung zu bevorzugen. In der praktischen Anwendung kann dieses Verhalten nützlich sein, um schnelle Abschätzungen von Problemstellungen zu erstellen.

Die genaueren Untersuchung der Aufteilung der Simulationszeit in die unterschiedlichen Berechnungsschritte ist in Abbildung 4.5 beispielhaft für den in Abbildung 4.4 markierten Punkt dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass die Dauer zum Assemblieren der Matrixeinträge die Dauer der andere Schritte übersteigt und dementsprechend eine spezielle Untersuchung dieser Algorithmen, wie hier durchgeführt, sinnvoll ist.

4.2 Spule über einer Ferritplatte

In diesem Abschnitt wird die MQS-MagPEEC-Methode und die QS-MagPEEC-Methode auf eine quadratische Anordnung bestehend aus einer Spule über einer Platte aus magnetischen Material angewendet und die Ergebnisse mit einer kommerziellen 3D-FEM Software CST STUDIO SUITE® [100] evaluiert. Dazu wird, im Gegensatz zu dem vorherigen Beispiel der Kugel im homogenen Magnetfeld, das vollständige System der MQS- bzw. QS-MagPEEC-Methode nach (3.61) bzw. (3.24) genutzt. Die Wahl des Beispiels ist durch aktuelle Entwicklungen im Bereich der induktiven Energieübertragung motiviert, da solche und ähnliche Geometrien mit



Vergrößerung in Abbildung 4.7

Abbildung 4.6.: Darstellung der quadratischen Anordnung bestehend aus einer Spule mit 10 Windungen über einer Platte aus magnetischem Material. Der blau gekennzeichnete Bereich ist vergrößert in einer weiteren Perspektive in Abbildung 4.7 dargestellt.

unterschiedlichsten Abmessungen hinsichtlich der Nutzung als Primärspule von Ladeeinrichtungen untersucht werden [101].

Nachdem die Geometrie im ersten Abschnitt beschrieben wird, folgen in den weiteren Abschnitten detaillierte Informationen zur Nutzung der CST STUDIO SUITE® und der MagPEEC-Methode, wonach abschließend die Ergebnisse hinsichtlich der Simulationszeit und der Genauigkeit verglichen und Breitbandsimulationen durchgeführt werden.

4.2.1 Beschreibung des Beispiels

Die gewählte Geometrie ist in Abbildung 4.6 dargestellt und die Parameter der Anordnung sind Tabelle 4.2 zu entnehmen, wobei die Energie an einem diskreten Tor, welches vergrößert in Abbildung 4.7 dargestellt ist, in das System eingeführt wird. Daraus resultierend fließt ein Strom durch die 10 Windungen der Spule und ein elektromagnetisches Feld wird aufgebaut.

Das magnetische Material der Platte ist ein Ferrit, da dieses ein in der Praxis relevantes Material für Anwendungen in der Leistungselektronik und induktiven Energieübertragung ist. Begründet ist dieses damit, dass Ferrite eine geringe elektrische Leitfähigkeit aufweisen und weichmagnetisch sind, was eine geringe Hysterese und somit geringe Verluste innerhalb des magnetischen Materials ergibt. Typischerweise werden diese Ferrite im annähernd linearen Bereich betrieben, sodass für die Simulation solcher Bauteile die in dieser Arbeit vorgestellte MagPEEC-Methode geeignet ist. Dennoch haben Ferrite ein dispersives

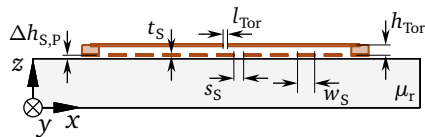


Abbildung 4.7.: Vergrößerung des in Abbildung 4.6 blau gekennzeichneten Bereichs in einer weiteren Perspektive, sodass das diskrete Tor detailliert dargestellt wird.

vorgestellte MagPEEC-Methode geeignet ist. Dennoch haben Ferrite ein dispersives

Verhalten, welches hier für dieses speziell genutzte Material in Abbildung 4.8 dargestellt und als frequenzabhängige relative Permeabilität $\underline{\mu}_r(\omega)$ modelliert ist.

Tabelle 4.2.: Geometrische Parameter.

	Name	Wert
Platte	l_p	24 mm
	$\Delta h_{S,P}$	0,05 mm
	t_p	1 mm
Spule	N_W	10
	l_S	22 mm
	t_S	0,05 mm
	w_S	0,35 mm
	s_S	0,2 mm
	κ_{Kupfer}	58 MS m^{-1}
Tor	h_{Tor}	0,2 mm
	l_{Tor}	0,1 mm

Im Allgemeinen lässt sich die Torimpedanz $\underline{Z}_{\text{Tor}}$ des passiven Bauteils berechnen, indem ein Strom in ein diskretes Tor eingeprägt und die Spannung bestimmt wird. Die so bestimmte Torimpedanz ist von jeglichen in Tabelle 4.2 dargestellten Parametern und im Speziellen von der Frequenz abhängig. Typischerweise wird bei induktiven Systemen² der Realteil der Torimpedanz $\Re\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}$ als Gesamtverluste bezeichnet, da diese sich aus der Überlagerung aus den Ohm'schen Verlusten der Spule und den Verlusten des magnetischen Materials ergeben. Die Verluste innerhalb des magnetischen

Materials sind durch den Imaginärteil der komplexen relativen Permeabilität – dargestellt in Abbildung 4.8 – modelliert. Der Imaginärteil der Torimpedanz $\Im\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}$ entspricht der Energiespeicherfähigkeit des Systems, was bei den induktiven Bauelementen als Induktivität beschrieben wird [102]. Dieses ist aber nur in Grenzen korrekt, da auch solche Bauteile hinzu höheren Frequenzen kapazitives Verhalten aufweisen und damit der Imaginärteil der Impedanz negativ werden kann.

Typischerweise ist der Gütefaktor bei dem Entwurf von induktiven Bauteilen entscheidend. Dieser wird grundlegend als das Verhältnis der gespeicherten Energie und der Verlustenergie multipliziert mit 2π definiert [103]. Damit kann diese Definition auf fast alle Energie speichernden physikalischen Systeme angewendet werden. Für ein passives elektronisches Bauteil, welches im Frequenzbereich beschrieben ist, ergibt sich der Gütefaktor zu der Formulierung

$$Q_L = \frac{|\Im\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}|}{|\Re\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}|}, \quad (4.5)$$

woraus sich direkt erschließt, dass ein hoher Gütefaktor geringe Verluste des passiven Bauteils und eine hohe Energiespeicherfähigkeit ergibt.

In den folgenden Abschnitten werden die simulierten Gütefaktoren der MQS-

² Die Abgrenzung kapazitiver gegenüber induktiver Systeme ist typischerweise durch die überwiegende magnetische gegenüber der kapazitiven Energie innerhalb des Systems durchgeführt.

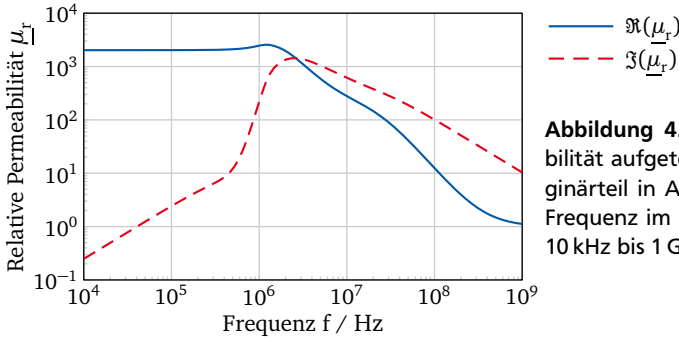


Abbildung 4.8.: Relative Permeabilität aufgeteilt in Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit von der Frequenz im Frequenzbereich von 10 kHz bis 1 GHz.

bzw. QS-MagPEEC-Methode und der FEM verglichen, da dieser Faktor eine charakteristische Größe des Systems darstellt und die Verluste sowie die Energiespeicherkapazität abbildet. In Vorabuntersuchungen, die die Simulation der Spule mit und ohne Platte beinhalten, ergibt sich der Hub des Imaginärteils der Torimpedanz $\Im\{Z_{\text{Tor}}\}$ durch die Platte aus magnetischem Material zu etwa 44 %, was eine entscheidenden Erhöhung des Gütefaktors zur Folge hat. In Abbildung 4.8 ist deutlich, dass die Verluste des magnetischen Materials ein Maximum bei einer Frequenz von etwa 2 MHz aufweisen, wonach die gewählte Simulationsfrequenz zum Vergleichen der Simulationszeiten gewählt wurde.

4.2.2 CST STUDIO SUITE®-Simulationen

Zum Vergleich der MagPEEC-Methode und der FEM wird die kommerziellen Software CST STUDIO SUITE® eingesetzt. Zum einen wird eine Referenzlösung mit der MQS-Näherung zum Vergleich mit der MQS-MagPEEC-Methode bestimmt und zum anderen werden Konvergenzstudien und Breitbandsimulationen durchgeführt, wobei auf die Einstellungen und die Durchführung im Folgenden detailliert eingegangen wird.

Die Referenzlösung und damit auch die Konvergenzstudie werden, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, bei der Frequenz von 2 MHz und mit der MQS-Näherung durchgeführt. Die Herausforderungen aller FEM-Simulationen dieser Art von Bauteilen ist das große Aspektverhältnis der kleinsten zu den größten Zellen, welches sich von μm nahe den Leiterbahnoberflächen bis hin zu cm erstreckt. Damit die Verluste auf Basis der Skin- und Proximity-Effekte innerhalb der Leiter mit hoher Genauigkeit bestimmt werden können, ist ein sehr feines Volumengitter nötig, wobei hier – um dennoch die Anzahl der genutzten Tetraeder zu verringern – die Leiter als verschieden große Quader modelliert sind und die lokalen

Gittereinstellungen variiert werden können.

Ein Ausschnitt des Gitters der Referenzsimulation ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Für die Konvergenzanalysen ist eine globale Variable definiert, welche die globalen und alle lokalen Gittereinstellungen verfeinert. Die Konvergenzstudien basieren auf drei verschiedenen Ordnungen der Basisfunktionen und die Wahl eines effizienten Lösungsalgorithmus ist der Software überlassen. Die Ergebnisse dieser Analysen sind in Abbildung 4.11 bezogen auf die Referenzsimulation für die Frequenz von 2 MHz gegenüber der Simulationszeit T_{Sim} dargestellt. Die Beschreibung der MagPEEC-Simulationen ist hingegen in dem folgenden Abschnitt verfasst. Wie erwartet, verringert sich der Fehler des Gütefaktors Q_L mit der Verfeinerung des Gitters und der damit verbundenen Erhöhung der Simulationszeit. Für hohe Genauigkeiten des Gütefaktors für dieses Beispiel ist es notwendig, eine hohe Ordnung der Basisfunktionen zu wählen, da die Stromdichte innerhalb der Leiter aufgrund des Skin-Effekts besser approximiert werden kann.

Das diskrete Tor als Anregung ist als Spulensegment modelliert, welches an den Eintrittsflächen mit zwei perfekten elektrischen Leitern abgeschlossen ist. Die Länge des Tors l_p ist zu 1 mm gewählt, sodass diese klein gegenüber den anderen Abmessungen des Beispiels und der Einfluss auf die Simulationsergebnisse zu vernachlässigen ist. Das Hintergrundmaterial ist als Freiraum modelliert, wobei der Simulationsbereich durch eine elektrische Randbedingung abgeschlossen ist. Über die beschriebenen Simulationen bei einer Frequenz von 2 MHz sind Breitbandsimulationen mit der MQS-FEM und der Vollwellen-FEM³ durchgeführt und zum Vergleich mit den Ergebnissen der MagPEEC-Methode in Abbildung 4.13 und Abbildung 4.14 dargestellt.

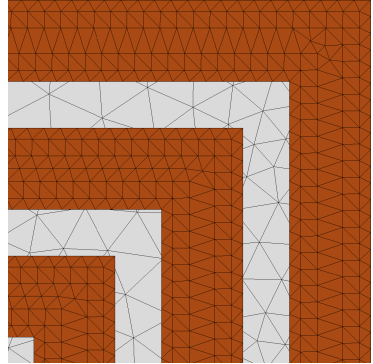


Abbildung 4.9.: Gitter der FEM für die Referenzlösung. Das Gitter des Freiraums ist nicht dargestellt.

4.2.3 MagPEEC-Simulationen

Bevor die Ergebnisse der FEM mit den Ergebnissen der MQS- und QS-MagPEEC-Methode verglichen werden, sei hier erläutert, wie die Einstellungen gewählt sind. Die in Abbildung 4.6 dargestellte Spule ist in $4N_w = 40$ gerade Leiter mit

³ Bei dem Vollwellen-Ansatz wird der vollständige Satz der Maxwell'schen Gleichungen gelöst.

rechteckigem Querschnitt aufgeteilt. Die Unterteilung des Querschnitts ist, wie in Abschnitt 3.9 beschrieben, durch das Einstellen der maximalen Skin-Eindringtiefe δ_{\max} und des Skin-Faktors χ durchgeführt. Durch die Verringerung der Skin-Eindringtiefe und des Skinfaktors wird die Anzahl der Stromzellen zur Unterteilung des Querschnitts erhöht, was eine Erhöhung der Simulationszeit und der Genauigkeit ergibt. Die Eckendiskretisierung der Spule ist, wie in Abschnitt 3.9 beschrieben, ohne ein Überlappen der Zellen durchgeführt (vgl. Abbildung 3.12b auf Seite 78), da der resultierende Fehler dieser Eckendiskretisierung einen geringen Einfluss auf die Gesamtgenauigkeit hat.

Da in diesem Beispiel die Volumenzellen der Spule nah den Oberflächenzellen des magnetischen Materials sind (vgl. $\Delta h_{s,p}$ in Tabelle 4.2), ist hier das in Abschnitt 3.9 beschriebene adaptive Oberflächengitter genutzt. Dieses unterstützt zum einen das lokale Verfeinern des Oberflächengitters in den Bereichen, an denen sich die Magnetisierungsoberflächenstromdichte stark ändert, und zum anderen die Konvergenz des numerischen Integrationsalgorithmus für den Kopplungsterm $T_{un}^{\kappa\mu}$. Um die Genauigkeit des Gütefaktors zu erhöhen und damit eine Konvergenzstudie durchzuführen, wird zusätzlich zu der Erhöhung der Anzahl der Volumenzellen für die elektrische Stromdichte das Oberflächengitter verfeinert. Dieses geschieht ausschließlich durch das Erhöhen des Abstands der Wirkung des adaptiven Oberflächengitters.

Die gewählte Geometrie der Spule und die Diskretisierung ergibt den Vorteil, dass Stromzellen sowie alle Oberflächenzellen orthogonal sind, was eine sehr effiziente Bestimmung der partiellen Elemente möglich macht. Es werden durch die in Abschnitt 3.8 beschriebene Multifunktions-Analyse, einige der analytischen und teilanalytischen Lösungen in Verbindung mit der numerischen Integration genutzt. Darüber hinaus ist auch ein maximales Abstandsverhältnis α eingeführt, sodass einige partielle Elemente mit der Integrationsordnung $N = 1$ und somit einer approximierten Lösung bestimmt werden.

Ein Ergebnis der Stromverteilung bei 2 MHz der Magnetisierungsoberflächenstromdichte und der elektrischen Stromdichte ist in Abbildung 4.10 dargestellt, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit der Abstand der Spule graphisch vergrößert ist. Es sei angemerkt, dass der Ausschnitt der elektrischen Stromverteilung an der Ecke, dem Ausschnitt des FEM Gitters in Abbildung 4.9 entspricht, wodurch die gewählten Gitter verglichen werden können.

4.2.4 Simulationsergebnisse

Es sind, wie einleitend beschrieben, MQS-FEM, Vollwellen-FEM, QS-MagPEEC- und MQS-MagPEEC-Simulationen durchgeführt. Zu Beginn ist eine Konvergenzstudie

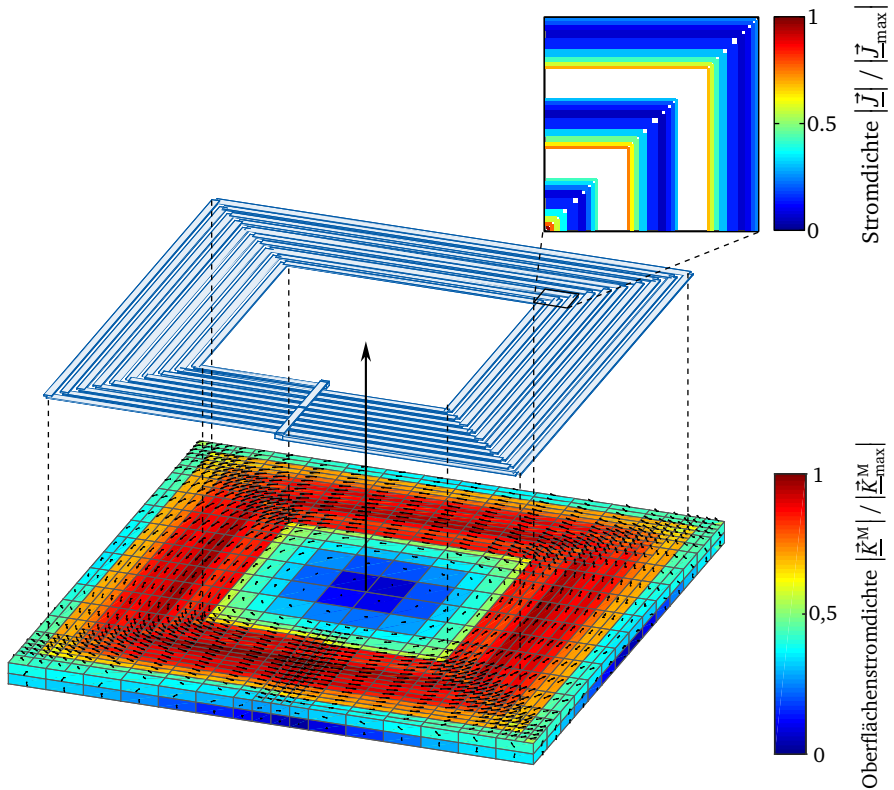


Abbildung 4.10.: Elektrische Stromdichte in der Spule und Magnetisierungsoberflächenstromdichte auf dem magnetischen Material für die quadratische Anordnung einer Spule über einer Platte aus magnetischem Material. Es sind die Simulationsergebnisse und die Diskretisierung an dem in Abbildung 4.11 markierten Punkt bei einer Frequenz von 2 MHz dargestellt, wobei die Anzahl der Oberflächenzellen $2N_p = 3.414$ und die Anzahl der Volumenzellen der elektrischen Stromdichte $N_p = 1.323$ beträgt. Ähnlich den Darstellungen in Abbildung 4.2 ergeben die Farben den normierten Betrag der jeweiligen Stromdichte und die Pfeile die Richtung der Magnetisierungsoberflächenstromdichte.

in Abhängigkeit von der Simulationszeit basierend auf der MQS-Näherung analysiert, da der Vergleich der Methoden nur in diesem Fall konsistent durchgeführt werden kann. Anschließend werden Breitbandsimulationen betrachtet, bei denen auch die Ergebnisse der Vollwellen-FEM und der QS-MagPEEC-Methode untersucht

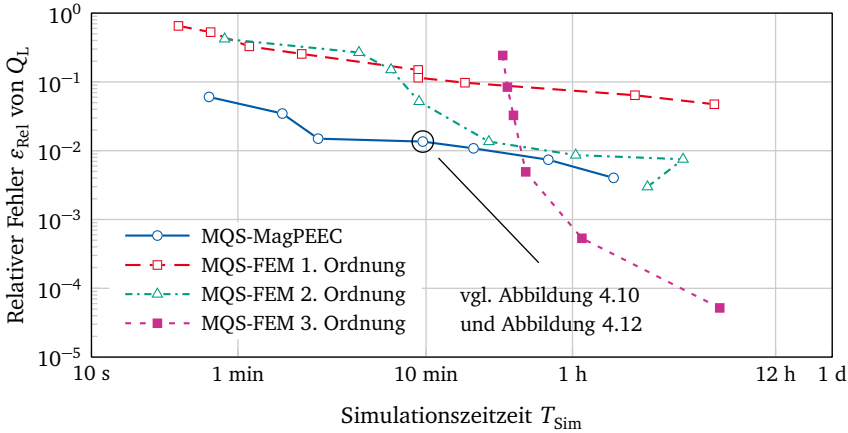


Abbildung 4.11.: Vergleich des relativen Fehlers des Gütefaktors Q_L der Spule über einer Ferritplatte dargestellt in Abbildung 4.6 mit der MQS-Näherung bei einer Frequenz von 2 MHz als eine Funktion der Simulationszeit T_{Sim} . Die zugehörige mit der FEM bestimmte Referenzsimulation ist in Abschnitt 4.2.2 beschrieben. Die aufgetragene Simulationszeit steigt mit der Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade, welche zum Bestimmen des Ergebnisses genutzt sind. Ein relativer Fehler von nur wenigen Prozent kann für dieses Beispiel mit der MagPEEC-Methode in kürzerer Zeit als mit der FEM erreicht werden.

sind. Basierend auf den Vergleichen der unterschiedlichen Methoden werden abschließend die Grenzen und die Gültigkeit der Methoden evaluiert.

Konvergenz und Zeitvergleich MQS

Die in Abbildung 4.11 durchgeführten Simulationen sind auf einem Computer mit 64 Bit Architektur, 512 GB RAM und einem 3,10 GHz Dual-Core Prozessor durchgeführt. Die Ergebnisse der MQS-FEM und MQS-MagPEEC-Methode sind hinsichtlich der vollständigen Simulationszeit T_{Sim} verglichen, was bei solch grundlegend unterschiedlichen numerischen Methoden die einzige sinnvolle Möglichkeit des Vergleichs darstellt. Der dargestellte relative Fehler ε_{Rel} ist der aktuell bestimmte Gütefaktor bezogen auf den Gütefaktor der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Referenzsimulation mit der MQS-FEM. Dabei sind die Ordnungen der Ansatzfunktionen der MQS-FEM unterschiedlich gewählt, sodass drei Kurven entstehen, welche mit einer Kurve der MQS-MagPEEC-Methode verglichen werden können.

Zu Beginn ist in Abbildung 4.11 die grundsätzliche Konvergenz der vollständigen MQS-MagPEEC-Methode gegenüber der MQS-FEM Referenzlösung gezeigt, da sich der relative Fehler beim Erhöhen der Anzahl der Freiheitsgrade und somit

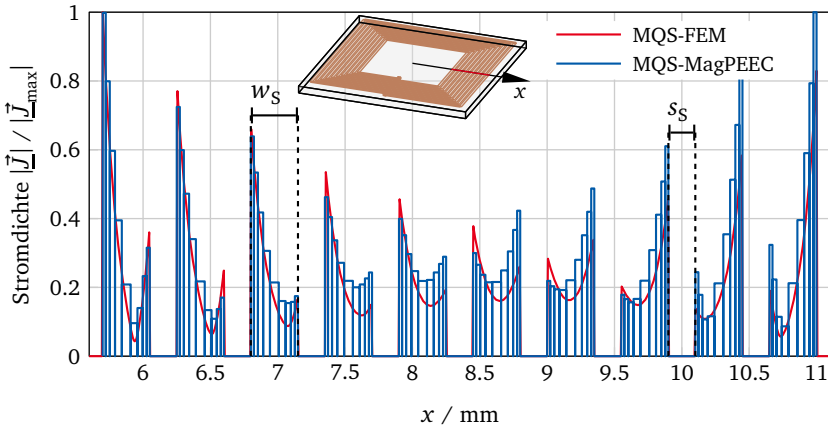


Abbildung 4.12.: Darstellung der elektrischen Stromdichte auf Basis der MQS-Näherung entlang einer Kurve vertikal durch die Windungen der Spule. Die elektrische Stromdichte ist zum einen mit der MQS-FEM und zum anderen mit der MQS-MagPEEC-Methode gezeigt, wobei die Diskretisierung der MQS-FEM die der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Referenzlösung und die Diskretisierung der MQS-MagPEEC-Methode die der markierten Diskretisierung in Abbildung 4.11 entspricht. Die Abweichungen sind durch die Mittlung der elektrischen Stromdichte entlang der Volumenzellen der MQS-MagPEEC-Methode gegenüber einem lokalen Auswerten der elektrischen Stromdichte bei der MQS-FEM zu erklären.

der Erhöhung der Simulationszeit stetig verringert. In Abschnitt 4.2.3 sind die Diskretisierungsparameter beschrieben, welche zum Verfeinern des Gitters der MQS-MagPEEC-Methode variieren.

Es ist deutlich, dass die unterschiedlichen Ordnungen der Ansatzfunktionen bei der MQS-FEM andere Konvergenzordnungen ergeben, was eine Änderung der dementsprechenden Simulationszeiten gegenüber der Genauigkeit verursacht. Bei dem Vergleich wird aber deutlich, dass die vorgestellte MQS-MagPEEC-Methode für Genauigkeiten im Bereich von wenigen Prozent Fehler schneller als alle MQS-FEM Simulationen ist. Aufgrund der niedrigeren Konvergenzordnung als bei der MQS-FEM höherer Ordnung schneidet diese Kurve die MQS-FEM Kurven. Typischerweise ist in der Praxis aufgrund von Toleranzen in der Geometrie und im Material die Bestimmung des Gütefaktors bis auf einige Prozent ausreichend, so dass hiermit gezeigt ist, dass die MQS-MagPEEC-Methode für solche und ähnliche Beispiele eine effiziente Alternative zur MQS-FEM darstellt.

Über den Vergleich eines globalen Wertes wie dem Gütefaktor hinaus, lässt sich die resultierende elektrische Stromdichte innerhalb der Spule betrachten,

welche durch die Skin- und Proximity-Effekte inhomogen über der Querschnittsfläche verteilt ist. Die Stromverteilung ist in Abbildung 4.12 entlang einer vertikalen Linie durch die Leiterbahnen der Spule dargestellt. Es sei hier zu erwähnen, dass sich durch den Einsatz des magnetischen Materials die Stromverteilung gegenüber einer Luftspule ändert, da sich die resultierenden Magnetfelder ändern. In Abbildung 4.12 sind die konstanten Ansatzfunktionen der MQS-MagPEEC-Methode im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen dritter Ordnung bei der MQS-FEM Referenzlösung zu erkennen. Zum einen können die Abweichungen durch die Wahl der Diskretisierung der MagPEEC-Methode, welche der des in Abbildung 4.11 markierten Fehlers entsprechen, argumentiert werden. Der relative Fehler des Gütefaktors ist in etwa 1 %, was sich auch in der Stromverteilung widerspiegelt. Zum anderen ergibt sich bei der MQS-MagPEEC-Methode durch die Wahl der langen Zellen – dargestellt in Abbildung 4.10 – eine Mittlung der Stromdichte innerhalb der Zelle über diese Länge. Bei der MQS-FEM ist dieses nicht der Fall und somit kann diese lokale Stromdichte bei der MQS-FEM gegenüber der gemittelten Stromdichte bei der MQS-MagPEEC-Methode abweichen.

Breitbandsimulationen

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Konvergenz und die Simulationsdauer der MQS-MagPEEC-Methode gezeigt und mit Ergebnissen der MQS-FEM verglichen worden, werden hier Breitbandsimulationen in einem Frequenzbereich von 10 kHz bis 1 GHz durchgeführt. Es wird das in Abschnitt 4.2.1 beschriebene System in dem angegebenen Frequenzbereich mit der MQS-FEM, Vollwellen FEM, MQS- und QS-MagPEEC-Methode simuliert. Zum einen lassen sich dadurch die Grenzen der MQS-Näherung und die Gültigkeit der QS-MagPEEC-Methode im Vergleich zu der Vollwellen-FEM untersuchen. Alle Breitbandsimulationen der FEM sind, wie in den vorherigen Abschnitten beschrieben, mit der Diskretisierung der Referenzlösung und alle Simulationen der MQS- und QS-MagPEEC-Methode mit der Diskretisierung, welche dem markierten Punkt in Abbildung 4.11 entspricht, durchgeführt.

In Abbildung 4.13a ist der Realteil der Torimpedanz, was der Summe der Verluste im magnetischen Material und den Ohm'schen Verlusten in den Windungen entspricht, über der Frequenz dargestellt. In Abbildung 4.13b ist der Imaginärteil der Torimpedanz dividiert durch die Kreisfrequenz ω , was der Induktivität und somit der Speicherkapazität der magnetischen Energie des Systems entspricht, dargestellt. Die Abweichungen werden hier nicht einzeln betrachtet, sondern anhand des Gütefaktors, in dem beide Effekte enthalten sind, untersucht. Dieser ist in Abhängigkeit der Frequenz in Abbildung 4.14a aufgetragen, wohingegen einige ausgewählte relative Abweichungen in Abbildung 4.14b dargestellt sind.

In Abbildung 4.14b ist die Gültigkeit der MQS-Näherung dieses Beispiels anhand der FEM untersucht und es wird deutlich, dass der Approximationsfehler der Ma-

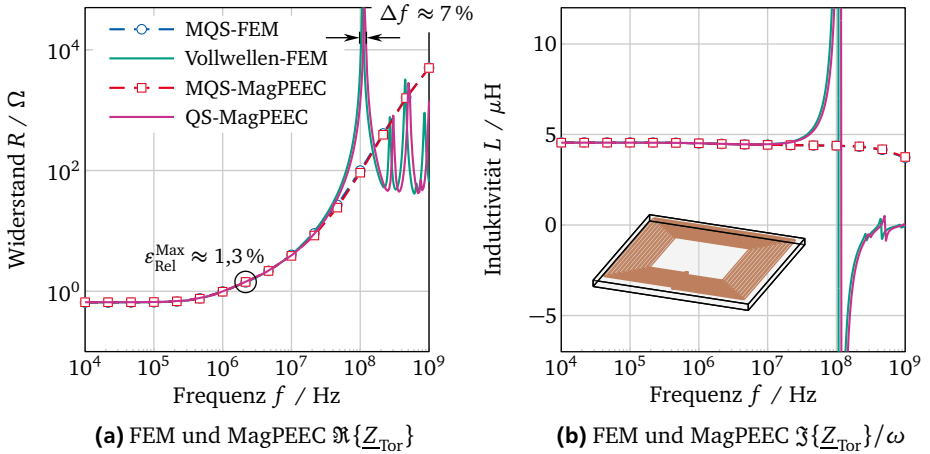


Abbildung 4.13.: Vergleich von FEM und MagPEEC-Simulationen bei hinreichend guten Einstellungen beider Simulationsmethoden in einem Frequenzbereich von 10 kHz bis 1 GHz. Die geometrischen Daten der Spule und der Platte sind der Tabelle 4.2 und die Daten des magnetischen Materials sind der Abbildung 4.8 zu entnehmen. (a) Darstellung des Widerstands als Realteil der Torimpedanz $\Re\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}$. (b) Darstellung der Induktivität $\Im\{\underline{Z}_{\text{Tor}}\}/\omega$. Es wird jeweils eine magnetoquasistatische Simulation, die Vollwellen-FEM und die QS-MagPEEC-Methode gezeigt.

gnetoquasistatik in einem Bereich von etwa 2 MHz bis 6 MHz stetig zu steigen beginnt. Ab dieser Frequenz ist somit die MQS-Näherung nicht mehr gültig, wobei die charakteristische Wellenlänge λ_{char} noch nicht in der Größenordnung der maximalen Abmessung der Geometrie L_{char} liegt. Diese beträgt bei 6 MHz exakt 50 m, wohingegen die Kantenlänge der Platte aus magnetischem Material von 24 mm gegeben ist. Der Grund für die Abweichungen ist das kapazitive Verhalten des Systems, welches erst ab einer quasistatischen Näherung 2-ter Ordnung abgebildet werden kann (vgl. Abschnitt 2.5.2) und somit innerhalb der MQS-Näherung nicht beachtet wird. Bei dem Vergleich der MQS-MagPEEC-Methode mit der MQS-FEM und der QS-MagPEEC-Methode und der Vollwellen-FEM ist deutlich, dass die Abweichungen unterhalb der gewählten Skin-Eindringtiefe δ_{max} im Bereich von 1 % sind und im Anschluss ansteigen. Es lässt sich direkt schließen, dass das Gitter der MagPEEC-Methode dementsprechend für höhere Frequenzen nicht fein genug gewählt ist. Deutlich ist dieses auch in dem vergrößerten Ausschnitt in Abbildung 4.14a. Dort sind zusätzlich zu den Ergebnissen der MQS-FEM und MQS-MagPEEC-Methode die Ergebnisse der MQS-MagPEEC-Methode mit einem feineren Gitter dargestellt,

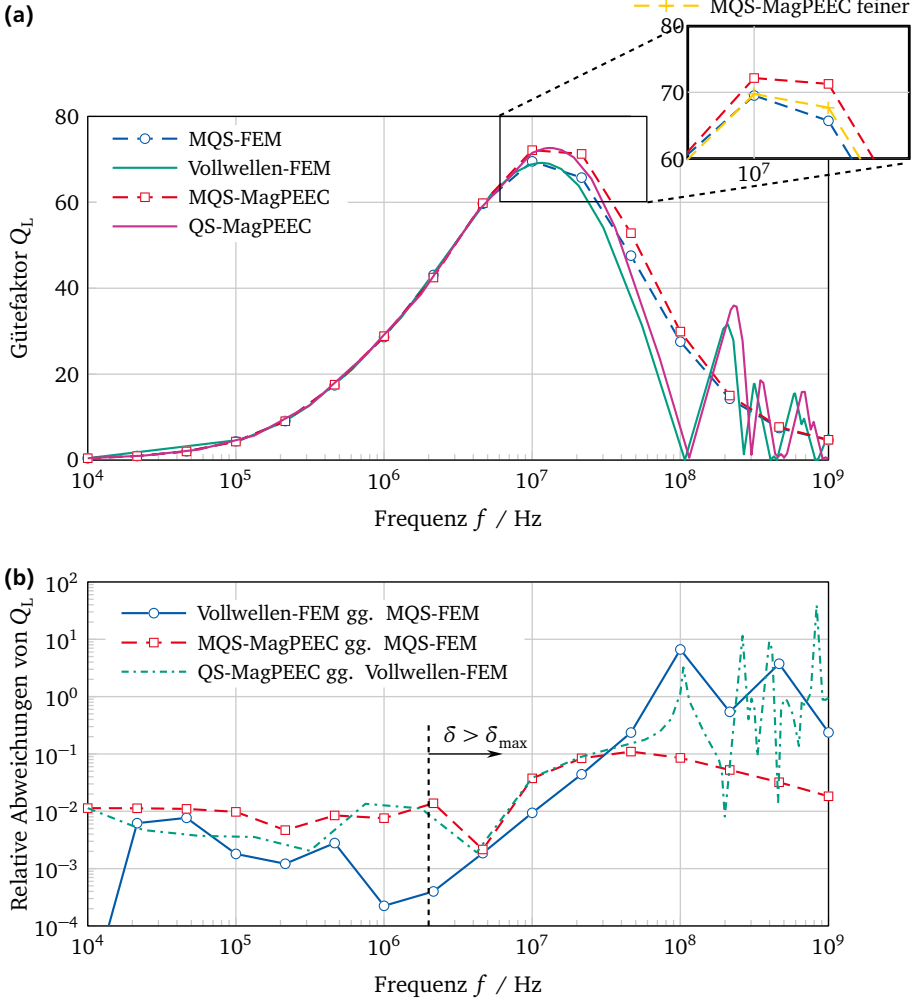


Abbildung 4.14.: (a) Darstellung des Gütefaktors Q_L über der Frequenz bestimmt mit der MagPEEC-Methode und der FEM bei einer konstanten Diskretisierung beider Methoden. (b) Relative Abweichungen der Gütefaktoren. Einerseits ist der Approximationsfehler der MQS-Näherung gegenüber dem Vollwellen-Ansatz, die Abweichungen der MQS-MagPEEC-Methode gegenüber der MQS-FEM und andererseits ist die Abweichungen der MagPEEC-Methode gegenüber der Vollwellen-FEM gezeigt. Deutlich sind die Grenzen der Verfahren zu entnehmen, wobei die Genauigkeit der MagPEEC-Methode durch die Erhöhung der maximalen Skin-Eindringtiefe δ_{\max} zum Erstellen des Volumengitters verbessert werden kann, was in der Vergrößerung des Maximums des Gütefaktors in (a) ersichtlich ist.

welche eine geringere relative Abweichung aufweisen.

Es ist zusätzlich deutlich, dass die QS-MagPEEC-Methode gegenüber der Vollwellen-FEM gute Ergebnisse erzielt, obwohl, wie in Abschnitt 2.7 detailliert beschrieben, Näherungen für die konsistente Herleitung der QS-MagPEEC-Methode durchgeführt sind. Hiermit ist gezeigt, dass für dieses Beispiel diese Näherungen zulässig sind.

4.3 Plattentransformator

In diesem Abschnitt wird die MagPEEC-Methode anhand eines praktisch relevanten Beispiels durch den Vergleich der Simulationsergebnisse für einen Leiterplattentransformator mit gemessenen Daten verifiziert. Der Transformator besteht aus einer Primär- und einer Sekundärwicklung, welche jeweils als Leiterbahnen auf den gegenüberliegenden Seiten der Leiterplatte ausgeführt sind, wobei auf diese Leiterbahnen jeweils eine zylinderförmige Ferritscheibe befestigt ist. Die Simulationsergebnisse der QS-MagPEEC-Methode werden mit Messergebnissen eines realen Aufbaus und die Ergebnisse der MQS-MagPEEC-Methode werden mit den Simulationsergebnissen einer nicht kommerziellen 2D-FEM Software FEMM® [104] zur Bestimmung elektromagnetischer Felder unter Berücksichtigung der MQS-Näherung verglichen. Nachdem der Aufbau des Transformators detailliert beschrieben wird, wird ausführlich auf die Simulationen, auf die Messungen und abschließend auf den Vergleich der Ergebnisse eingegangen.

4.3.1 Beschreibung des Bauteils

Das zu untersuchende passive Bauteil ist ein Transformator, welcher induktiv Energie von einer Primär- zu einer Sekundärwicklung übertragen kann. Im Allgemeinen existieren eine Vielzahl von Bauformen für unterschiedlichste Leistungsklassen und Anwendungen. Hier ist im Speziellen ein Plattentransformator untersucht, welcher in Abbildung 4.15 und Abbildung 4.16 dargestellt ist. Die spezielle Bauform dieses Leiterplattentransformators [105] hat die Vorteile einer platzsparenden Bauweise und einer kostengünstigen Herstellung.

In Abbildung 4.15a ist der Plattentransformator in einer Explosionszeichnung dargestellt, sodass der Lagenaufbau ersichtlich ist. Die Leiterplatte besteht aus vier Lagen, welche in unterschiedlichen Abständen zueinander angeordnet sind, wobei der Abstand der mittleren Lagen der Größere ist. Auf den vier Lagen sind vier spiralförmige Spulen mit 12 Windungen angeordnet und die beiden nah beieinander liegenden sind jeweils galvanisch mittels einer Durchkontaktierung verbunden. Somit bestehen die Spulen der Primär- und Sekundärseite jeweils aus 24 Windungen.

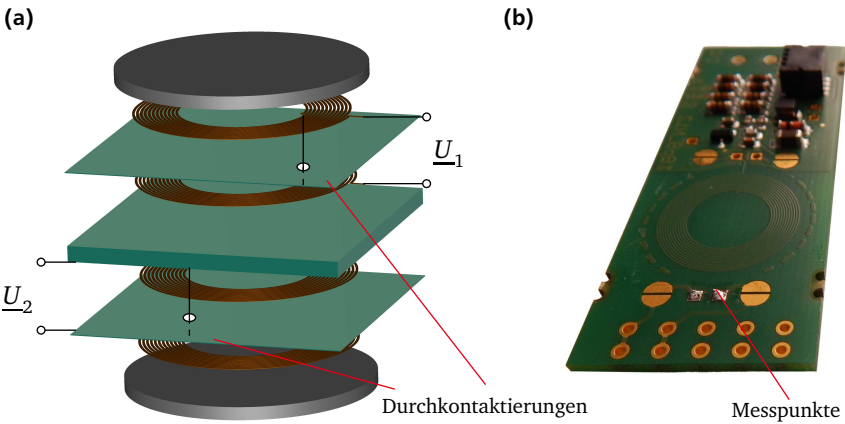


Abbildung 4.15.: Darstellung des Plattentransformators. (a) Darstellung des Lagenaufbaus in einer Explosionszeichnung. (b) Foto des Plattentransformators ohne Ferritscheibe, wodurch die oberste Lage der Leiterbahnen ersichtlich ist.

Abschließend sind von außen zwei zylinderförmige Ferritscheiben auf die Leiterplatte geklebt.

Zusätzlich zu den Fotos der Leiterplatte zum einen ohne Ferritscheibe in Abbildung 4.15b und zum anderen mit Ferritscheibe in Abbildung 4.16a ist ein Schliffbild des Bauteils in Abbildung 4.16b dargestellt. Zum Anfertigen dieses Schliffbilds wird die Leiterplatte in der Mitte des Plattentransformators zerteilt, an der Schnitkante geschliffen, poliert und durch ein Mikroskop fotografiert. Durch die Kenntnis der Auflösung des Mikroskops kann anhand der Fotos der exakte Lagenaufbau vermessen werden. Dieses ist nötig, da der Lagenaufbau und im Speziellen der Querschnitt der Leiterbahnen Fertigungstoleranzen unterliegen und somit ein Vergleich der Simulationsergebnisse ohne detaillierte Informationen über diese Toleranzen mit den Messergebnissen nicht in ausreichender Genauigkeit möglich ist. Beispielhaft sei hier auf das Unterätzen bei der Herstellung der Leiterbahnen auf der Leiterplatte verwiesen, was durch eine trapezförmige Querschnittsfläche der Leiterbahnen in dem Schliffbild in Abbildung 4.16b ersichtlich ist. Das magnetische Material der Ferritscheiben weist ebenso, wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben, ein dispersives Verhalten auf, sodass für die durchgeführten Simulationen eine ähnliche Kennlinie der in Abbildung 4.8 auf Seite 96 dargestellten genutzt wird.

Das physikalische Verhalten wie beispielsweise die Verluste oder die induktive

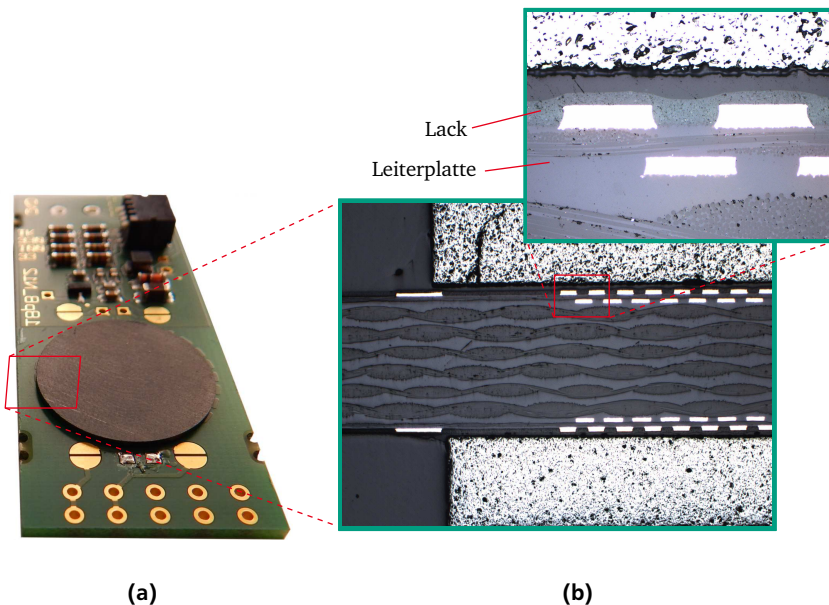


Abbildung 4.16.: Bild des Plattentransformators. (a) Ein Foto mit und ohne Ferritscheibe. (b) Das Schliffbild zur Bestimmung der realen Geometrie der Leiterbahnen mit zwei unterschiedlichen Vergrößerungen.

Kopplung von Transformatoren kann durch die \underline{Z} -Parameterdarstellung aus der 2-Tor Theorie [102, Kap. 4] beschrieben werden. Ähnlich den Ausführungen zu der Torimpedanz $\underline{Z}_{\text{Tor}}$ in Abschnitt 4.2 sind die Lösungen der elektromagnetischen Felder des gesamten Bauteils in den komplexen \underline{Z} -Parametern zusammengefasst. Es ergeben sich jeweils eine Eigenimpedanz der Spulen \underline{Z}_{11} und \underline{Z}_{22} und zwei Kopplimpedanzen \underline{Z}_{12} und \underline{Z}_{21} . In Matrixschreibweise ist das physikalische Verhalten des Transformators demnach durch

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

beschrieben [102, Gl. (4.25)] und in Abbildung 4.17 als äquivalentes Ersatzschaltbild dargestellt. Diese Formulierung einer \underline{Z} -Parameterdarstellung ist immer möglich, wenn das zu untersuchende System linear, zeitinvariant und passiv ist, wobei diese Einschränkungen hier gegeben sind.

Im Gegensatz zu den Untersuchungen einer einzelnen Spule, wie in Abschnitt 4.2

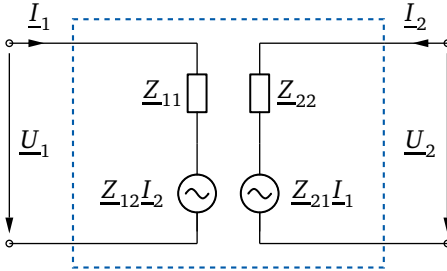


Abbildung 4.17.: Äquivalentes Ersatzschaltbild der \underline{Z} -Parameterdarstellung eines Transformators (vgl. (4.6)).

durchgeführt, kann bei einem Transformator jeweils ein Gütefaktor der beiden Spulen der Primär- und Sekundärseite definiert werden. Dementsprechend wird für den Vergleich der Simulationsmethoden und der Messungen anhand eines Parameters ein weiterer Faktor herangezogen, welcher auch praktisch relevant ist. Für den Entwurf von Transformatoren ist der maximale Wirkungsgrad bei optimaler Last entscheidend. Der Wirkungsgrad eines Energieübertragungssystem ergibt sich im Allgemeinen aus dem Quotienten der Nutzenergie zur zugeführten Energie und ist abhängig von der Last der Sekundärseite. Das Optimierungsproblem, welches durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach dem Real- und Imaginärteil der Lastimpedanz gelöst wird, lässt somit auf einen maximalen Wirkungsgrad η_{Max} des Systems schließen, welcher in kompakter Schreibweise durch [106, 107]

$$\chi_\eta = \frac{|\underline{Z}_{12}|^2}{\Re\{\underline{Z}_{11}\}\Re\{\underline{Z}_{22}\} - \Re\{\underline{Z}_{12}\}^2}, \quad (4.7a) \quad \eta_{\text{Max}} = \frac{\chi_\eta}{\left(1 + \sqrt{1 + \chi_\eta}\right)^2} \quad (4.7b)$$

in Abhängigkeit der \underline{Z} -Parameter aus (4.6) bestimmt wird. Bei der Dimensionierung solcher Transformatoren wird die Geometrie mittels numerischen Feldsimulationen hinsichtlich des maximalen Wirkungsgrads optimiert, wobei dieser von einer Vielzahl von Parametern abhängig ist. Speziell sei hier im Vorfeld schon auf die in Abschnitt 4.3.3 untersuchte Frequenzabhängigkeit verwiesen, wonach die optimale Betriebsfrequenz gewählt werden kann.

4.3.2 Simulationen und Messungen

In diesem Abschnitt werden die Simulationen mit FEMM[®], der MQS- und QS-MagPEEC-Methode und die Durchführung der Messungen beschrieben, wonach in dem folgenden Abschnitt die Ergebnisse verglichen werden.

2D-FEM Simulationen mit FEMM®

Aufgrund des nahezu rotationssymmetrischen Aufbaus können mit einem 2D-FEM Simulationsprogramm gute Ergebnisse erzielt werden. Die gewählte Software FEMM® bietet die Möglichkeit, die elektromagnetischen Felder mit rotationssymmetrischen Randbedingungen unter Berücksichtigung der MQS-Näherung zu bestimmen. Dabei sind ähnliche Herausforderungen wie bei der Nutzung der 3D-FEM Software CST STUDIO SUITE® (vgl. Abschnitt 4.2.2) zu beachten.

Das hohe Aspektverhältnis der Zellen zum Modellieren der Skin- und Proximity-Effekte ergibt sich auch hier, sodass ein sehr feines Gitter in und um die Leiterbahnen gewählt werden muss. Da dieses aber ausschließlich in zwei Dimensionen ausgeführt wird, ergeben sich weniger Freiheitsgrade und die Simulationszeit resultiert nur in einem Bruchteil einer dreidimensionalen Simulation. Ein Ausschnitt des zum Bestimmen der in Abschnitt 4.3.3 dargestellten Simulationsergebnisse genutzten Gitters ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Es können mit FEMM® ausschließlich Ergebnisse mittels der MQS-Näherung generiert werden und die Ergebnisse der MQS-MagPEEC-Methode werden damit verifiziert. Dabei sind Abweichungen durch die Wahl der unterschiedlichen Geometrie der dreidimensionalen MQS-MagPEEC-Methode im Gegensatz zu der 2D-FEM zu erwarten.

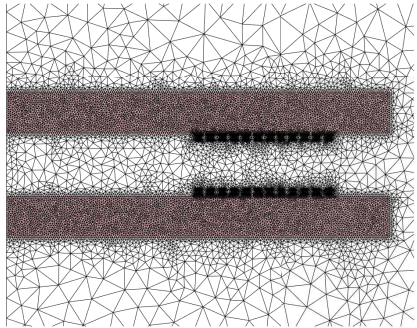


Abbildung 4.18.: Ausschnitt des 2D-FEM Gitters der Software FEMM®.

MagPEEC-Simulationen

Die Einstellungen der MQS- bzw. QS-MagPEEC-Methode sind ähnlich denen, welche in Abschnitt 4.2.3 beschrieben sind. Dementsprechend werden im Folgenden diese nicht detailliert vorgestellt, sondern nur auf etwaige Unterschiede eingegangen. Das genutzte Oberflächengitter einer Hälfte der Ferritscheiben ist in Abbildung 4.19a dargestellt, wodurch der Unterschied zu den in Abschnitt 4.2 diskutierten Untersuchungen deutlich wird. Es ergibt sich im Gegensatz zu dem Oberflächengitter in Abbildung 4.10 auf Seite 99 aufgrund der zylinderförmigen Geometrie ein aus orthogonalen und nicht-orthogonalen Zellen gemischtes Gitter. Somit werden nach der in Abschnitt 3.8 auf Seite 70 beschriebenen Multifunktions-Analyse andere Algorithmen zum Bestimmen der Kopplungsterme der Systemmatrix gewählt. Das Volumengitter bildet die spiralförmigen Leiterbahnen mit jeweils 15 rechteckigen Leitersegmenten ab, wobei der Querschnitt entsprechend des Skin- und Proximity-Effekts unterteilt ist.

Für die Simulationen mittels der QS-MagPEEC-Methode werden die Potentialkoeffizienten durch die relative Permittivität des Leiterplattenmaterials $\epsilon_r = 4.7$ dividiert, was impliziert, dass der ganze Freiraum nicht mit Vakuum, sondern mit Leiterplattenmaterial gefüllt ist. Für dieses Beispiel zeigen die Ergebnisse, dass diese Näherungslösung zulässig ist, obwohl, wie in Abschnitt 2.7 ausführlich diskutiert, weitere Anteile an dem magnetischen Vektorpotential durch die Wirkung der Permittivität nicht berücksichtigt werden (vgl. (2.49b) mit (2.47)).

In Abbildung 4.19a ist über das Oberflächengitter hinaus die magnetische Flussdichte in einer Schnittebene dargestellt, welche auf Basis des Ergebnisvektors der MQS-MagPEEC-Methode bestimmt ist. Es wird die magnetische Flussdichte jeder einzelnen elektrischen Volumenstromdichte und Magnetisierungsoberflächenstromdichte auf der Schnittebene numerisch bestimmt und superponiert, sodass eine Gesamtlösung der magnetischen Flussdichte resultiert. Dieses ist möglich, da die magnetische Flussdichte den Wirbeln des magnetischen Vektorpotentials entspricht (vgl. (2.7b)) und dieses sich aus einer Überlagerung aller Quellanteile nach (2.14b) und Abbildung 2.2 ergibt. Um diese Flussdichte aus den konstanten Stromdichten in den Volumen und Oberflächenzellen numerisch zu bestimmen, werden die in den letzten drei Zeilen der Tabelle 3.3 auf Seite 69 dargestellten analytischen Lösungen in Verbindung mit den in Abschnitt 3.8 auf Seite 63 beschriebenen numerischen Integrationsalgorithmen genutzt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die magnetische Flussdichte durch den Einsatz der Ferrite abgeschirmt und resultierend die Energie zwischen den Platten gespeichert wird. Um diesen Einfluss der Ferritscheiben detailliert zu untersuchen, ist in Abbildung 4.19b der Betrag der magnetischen Flussdichte und in Abbildung 4.19c der Betrag der magnetische Feldstärke entlang der auch in Abbildung 4.19a dargestellten z -Achse aufgetragen. Zusätzlich dazu sind Simulationen der jeweiligen Felder mittels der klassischen PEEC-Methode ohne die Ferritscheibe durchgeführt und dargestellt, wobei alle Einstellungen sowie das Gitter identisch sind. Der Vergleich der Felder mit und ohne Ferritscheiben ergibt, dass der Betrag zwischen den Ferritscheiben deutlich ansteigt und der Betrag außerhalb der Ferritscheibe ohne Scheiben höher als mit Scheiben ist. Darüber hinaus lässt sich zeigen, dass die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte, welche bei diesem Beispiel entlang der z -Achse der Geometrie überwiegt, stetig durch das magnetische Material verläuft, wohingegen die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke an dem magnetischen Material springt. Dieses Verhalten ist in den Grundlagen in Abschnitt 2.1 erwähnt und hier anhand eines praktischen Beispiels bestätigt.

Messungen

Damit die Simulationsergebnisse anhand von Messungen verifiziert werden können, wird die Impedanzmatrix der \underline{Z} -Parameterdarstellung aus (4.6) des in

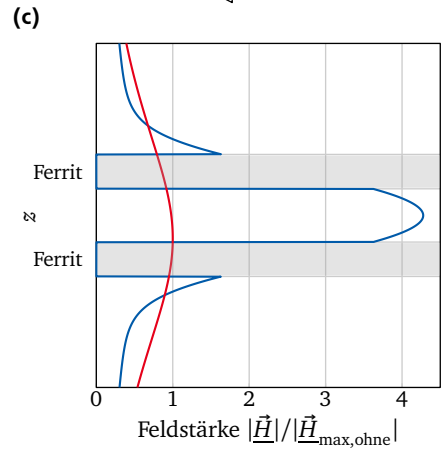
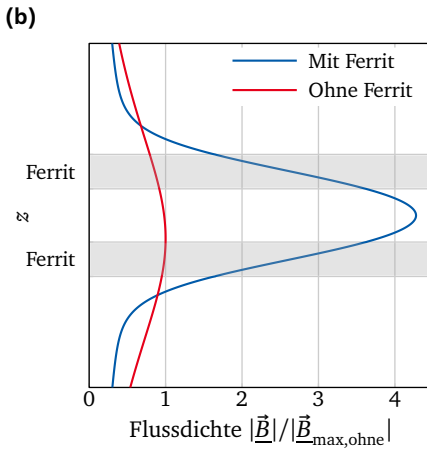
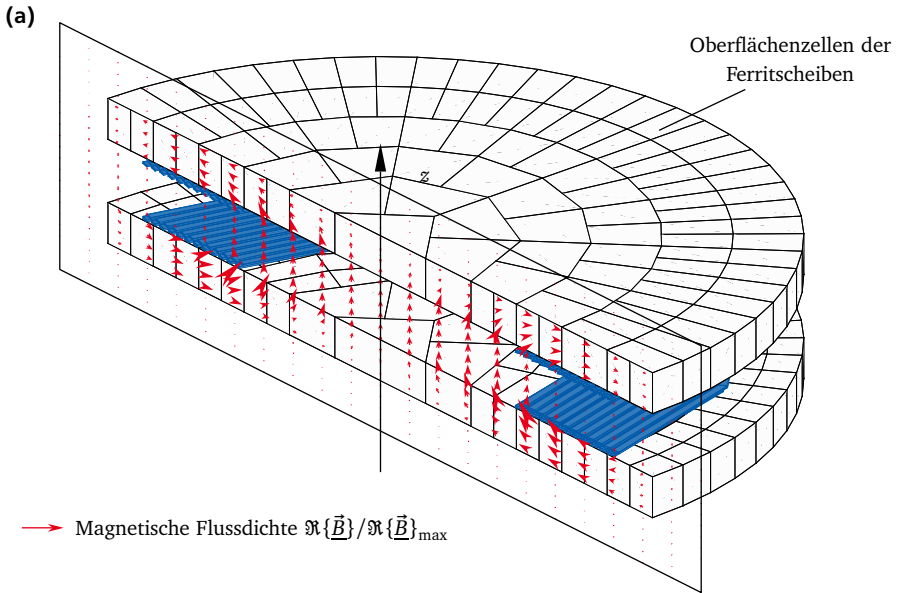


Abbildung 4.19.: Simulationsergebnisse der MQS-MagPEEC-Methode des magnetischen Felds und der magnetischen Flussdichte bei Anregung der unteren Spule. (a) Zweidimensionale vektorielle Darstellung der magnetischen Flussdichte in einer Ebene mit dem MagPEEC-Modell, wobei die Größe der Pfeile mit dem Betrag der magnetischen Flussdichte skaliert. (b) Magnetische Flussdichte entlang der z -Achse mit und ohne Ferritscheibe. (c) Magnetische Feldstärke entlang der z -Achse mit und ohne Ferritscheibe.

Abbildung 4.15 und Abbildung 4.16 dargestellten Plattentransformators mit einem Impedanz-Analysator [108] bestimmt. Dieser kann Impedanzen in einem Frequenzbereich von 40 Hz bis zu 110 MHz aufnehmen und an dem Tor lässt sich zwischen eingprägtem Strom und eingprägter Spannung wählen. Dabei ist zu beachten, dass die magnetischen Materialien bei einer zu hohen Stromstärke innerhalb der Spulen die Sättigung erreichen können und somit nicht mehr im linearen Bereich betrieben sind. Dieses ist zu vermeiden, indem die Messungen mit einer relativ geringen und definierten eingprägten Stromstärke durchgeführt werden, wobei erwähnt sei, dass hin zu niedrigen Impedanzen die Messungenauigkeiten durch die Verringerung der eingprägten Stromstärke zunehmen. Daraus resultiert auch eine Verringerung der Messgenauigkeit gegenüber höheren Gütefaktoren, welche auch in [108] angegeben ist.

Um die vollständige Impedanzmatrix in (4.6) zu bestimmen, werden Messungen an der Primär- und Sekundärseite im Leerlauf und im Kurzschluss der Sekundär- bzw. Primärseite durchgeführt und die Ergebnisse in die \underline{Z} -Parameterdarstellung (4.6) umgerechnet. Dazu ist eine Messspitze mit der Primärseite des Transformators durch zwei Kontaktflächen auf der Oberfläche der Leiterplatte verbunden, wobei die genutzte Messspitze im Vorfeld durch eine Kurzschlussmessung und eine Leerlaufmessung kalibriert wird. Die Kontaktflächen auf der Leiterplatte sind in Abbildung 4.15b beschriftet.

4.3.3 Vergleich der Mess- und Simulationsergebnisse

Die in Abschnitt 4.3.2 beschriebenen Simulationsmethoden und die Messungen zur Bestimmung der \underline{Z} -Parameter des Plattentransformators werden hier miteinander verglichen. Damit lassen sich die Ergebnisse der in der vorliegenden Arbeit eingeführten MQS- bzw. QS-MagPEEEC-Methode gegenüber Messergebnissen eines realen Bauteils und gegenüber einer weiteren Simulationssoftware FEMM[®] evaluieren.

In Abbildung 4.20 ist der Gütefaktor der Primärseite resultierend aus dem Quotienten des Real- und Imaginärteils von \underline{Z}_{11} über der Frequenz dargestellt. Es ist deutlich, dass die Ergebnisse der 2D-FEM bis zu dem ersten Maximum des Gütefaktors bei in etwa 1 MHz gegenüber den Ergebnissen der MQS-MagPEEEC-Methode eine hohe Genauigkeit aufweisen. Im weiteren Verlauf weichen diese jedoch voneinander ab, wobei die Abweichungen in den Geometrien in drei Dimensionen im Gegensatz zu zwei Dimensionen hin zu höheren Frequenzen einen steigenden Einfluss haben. Auch im Vergleich der MQS-MagPEEEC-Methode und der QS-MagPEEEC-Methode ist ähnliches Verhalten deutlich. Wie schon in vorherigen Untersuchungen in Abschnitt 4.2.4 dargestellt, sind Resonanzeffekte, was einen Einbruch des Güte-

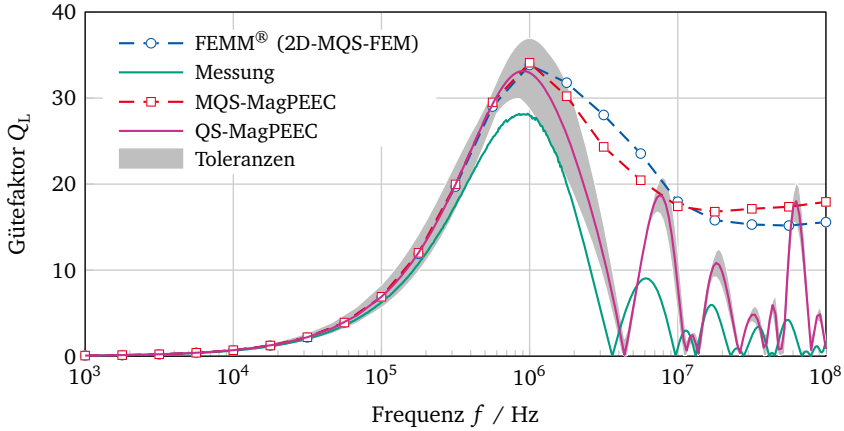


Abbildung 4.20.: Darstellung der simulierten und gemessenen Gütefaktoren $Q_L = |\Im\{\underline{Z}_{11}\}| / |\Re\{\underline{Z}_{11}\}|$ der Primärseite des Plattentransformators aus Abbildung 4.16a über der Frequenz. Zum Bestimmen der grau unterlegten Toleranzen sind 100 Frequenzbereichssimulationen mit der QS-MagPEEC-Methode durchgeführt, wobei die Leitfähigkeit des Kupfers von 58 MS m^{-1} um $\pm 10\%$ und die Weite der Leiterstrukturen w_5 um $\pm 10\%$ verringert bzw. erhöht ist. Es wird deutlich, dass sich der Bereich der Toleranzen mit Erhöhung des Gütefaktors jeweils vergrößert.

faktors ergibt, nicht mit der MQS-Näherung abzubilden. Somit ergibt sich eine erhebliche Abweichung der Ergebnisse der MQS-MagPEEC-Methode von denen der QS-MagPEEC-Methode und den Messergebnissen hinzu höheren Frequenzen.

Bei dem Vergleich der Ergebnisse der Messungen und der QS-MagPEEC-Methode sind Abweichungen zu erkennen. Der qualitative Verlauf des simulierten Gütefaktors über der Frequenz folgt bis hin zur vierten Resonanz den gemessenen Resonanzen, wobei quantitativ die Maxima des simulierten Gütefaktors zwischen den Resonanzen etwas höher als die des gemessenen Gütefaktors sind. Anhand der grau unterlegten Toleranzen, welche durch eine Parametervariation der QS-MagPEEC-Methode bestimmt sind, ist deutlich, dass die Fertigungstoleranzen in der Geometrie oder in den Materialparametern in den Maxima der Güte den größten Einfluss haben und damit die Abweichungen zu erklären sind.

Im Gegensatz zu der Untersuchung des Gütefaktors einer Spule wird bei der Berechnung des maximalen Wirkungsgrads η_{Max} der vollständige Satz der in (4.6) definierten \underline{Z} -Parameter betrachtet. In Abbildung 4.21a sind die Ergebnisse der Simulationen und der Messungen des maximalen Wirkungsgrad zum Vergleich dargestellt. Es ist deutlich, dass bei der Betriebsfrequenz von 1 MHz der über der

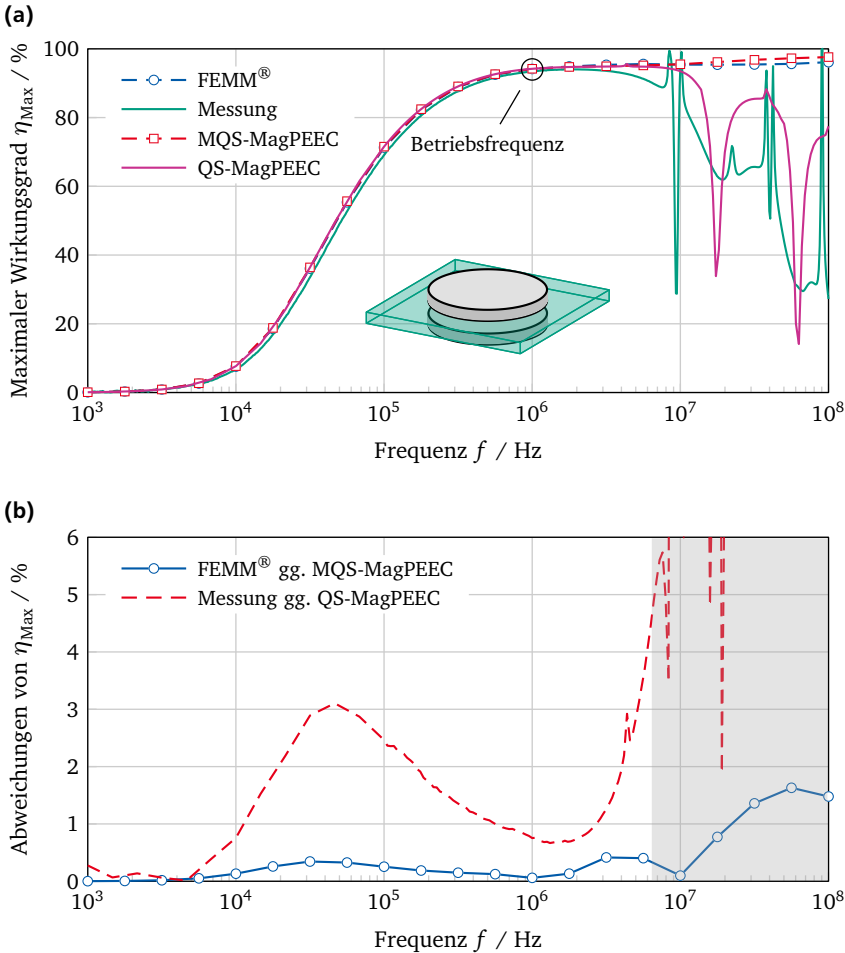


Abbildung 4.21.: Darstellung des gemessenen und simulierten maximalen Wirkungsgrads η_{Max} nach (4.7) des Plattentransformators. (a) Absolute Werte. (b) Absolute Abweichungen der 2D-FEM Simulationen gegenüber der MQS-MagPEEC-Methode und der Messungen gegenüber der QS-MagPEEC-Methode. Der nicht praktisch relevante Bereich ist grau hinterlegt, wobei die resultierenden Abweichungen in den anderen Bereichen hinreichend gering sind.

Frequenz steigende Wirkungsgrad nahe dem Maximum ist. Dieses Maximum kann bei der Nutzung der MQS-Näherung nicht abgebildet werden, da die Resonanzen hin zu höheren Frequenzen nicht erfasst sind und somit der Wirkungsgrad weiter steigt und nicht einbricht. Die Ergebnisse der QS-MagPEEC-Methode weisen dieses Verhalten jedoch auf, wobei im Vergleich zu den Messergebnissen der Einbruch des Wirkungsgrads hin zu höheren Frequenzen verschoben ist. Die Anwendung der QS-MagPEEC-Methode für diese Untersuchungen ist dennoch gerechtfertigt, um bei der Optimierung des Bauteils den Wirkungsgrad korrekt gegenüber der Betriebsfrequenz einzustellen. In Abbildung 4.21b sind die absoluten Abweichungen der 2D-FEM gegenüber der MQS-MagPEEC-Methode und der Messung gegenüber der QS-MagPEEC-Methode dargestellt. Die absoluten Abweichungen der 2D-FEM gegenüber der MQS-MagPEEC-Methode sind über einem weiten Frequenzbereich ausreichend klein ($\leq 1\%$), sodass die Nutzung der MQS-MagPEEC-Methode verifiziert ist. Die Abweichungen der QS-MagPEEC-Methode ist ebenfalls gegenüber der Messung in dem praktisch relevanten Frequenzbereich in einem annehmbaren Bereich, sodass gezeigt ist, dass die vorgestellte Methode zur Optimierung und dem Entwurf solcher Bauteile eingesetzt werden kann und funktioniert.

4.4 Untersuchungen eines Ringkerns mit der MQS-MagPEEC⁰-Methode

In Abschnitt 3.10 sind die Auslöschungsfehler der MagPEEC-Methode bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten beschrieben, woraufhin ein Verfahren vorgestellt ist, womit dennoch solche Problemstellungen mit der dort eingeführten MQS-MagPEEC⁰-Methode gelöst werden können. Hier wird anhand eines Ringkerns aus magnetischem Material die Funktion der MQS-MagPEEC⁰-Methode untersucht und evaluiert. Dabei wird die Konvergenz anhand eines akademischen Beispiels und abschließend ein praktisches Beispiel einer stromkompensierten Drossel beschrieben. Wie in Abschnitt 3.10 angemerkt, lässt sich ein analytischer Ausdruck der Magnetisierung eines Ringkerns in Abhängigkeit der Durchflutung

$$\vec{M}_0(\underline{\Theta}_I, \rho) = (\underline{\mu}_r - 1) \frac{\underline{\Theta}_I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi \quad (4.8)$$

konstruieren, wobei als Anregung ein zentral entlang der z -Achse angeordnetes Filament angenommen ist. Dabei ist $\underline{\Theta}_I = I_0 N_I$ die Durchflutung, welche in Abschnitt 3.10 definiert ist, π die Kreiszahl und ρ, φ, z die Zylinderkoordinaten. Der Ausdruck (4.8) basiert auf der mit der linearen und isotropen Materialbeziehung aus (2.6b) umgerechneten analytischen Lösung für das magnetische Feld um ein entlang der z -Achse unendlich ausgedehntes stromdurchflossenes Filament,

welche Standardwerken zu entnehmen ist (z. B. [11, Kapitel 5])

$$\vec{H} = \frac{I_0}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi. \quad (4.9)$$

Anschließend lässt sich aus \vec{M}_0 in (4.8) mit (3.56) und (3.57) ein Vektor der eingepprägten Magnetisierungsoberflächenströme \vec{i}_{p0} bestimmen und als Anregung des Systems in (3.58) nutzen.

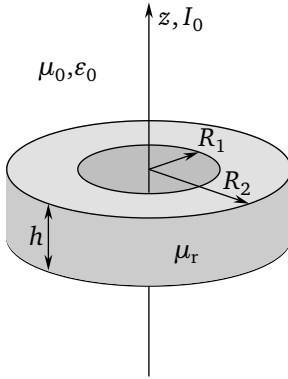
4.4.1 Vergleich gegenüber einem analytischen Ausdruck

Bevor die MQS-MagPEEC⁰-Methode anhand eines praktischen Beispiels und im Vergleich mit Messungen untersucht wird, wird hier auf ein akademisches Beispiel eingegangen. Einleitend wird die Konstruktion einer analytischen Referenzlösung der Induktivität eines Rings erläutert, wonach abschließend Simulationsergebnisse mit der Referenzlösung verglichen werden.

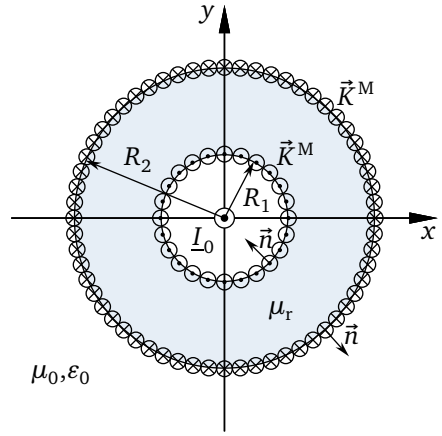
Konstruktion einer Referenzlösung

Entlang der z -Achse sei ein Filament mit dem Strom I_0 durch einen Ring mit dem Innenradius R_1 , dem Außenradius R_2 und der Höhe h aus einem magnetisch Material, welches durch eine rein reelle relative Permeabilität μ_r beschrieben ist, gegeben. Da das Filament, wie in Abbildung 4.22a angedeutet, zentriert und von unendlicher Ausdehnung entlang der z -Achse ist, ergibt sich die in (4.9) vorgestellte analytische Lösung des magnetischen Felds im ganzen Raum, da sich die Richtung und der Betrag des magnetischen Felds aufgrund der speziellen Geometrie mit oder ohne einem Ring bestehend aus magnetisches Material nicht ändert. Im Allgemeinen ist dem nicht so, was zum Beispiel in den Untersuchungen zu der Kugel im homogenen Magnetfeld in Abschnitt 4.1 detailliert beschrieben ist. Hier ergeben sich jedoch ausschließlich Tangentialkomponenten des magnetischen Felds an der Oberfläche des Ringkerns aus magnetischem Material, welche nach (2.3b) unter der Voraussetzung der MQS-Näherung und der Abwesenheit einer elektrischen Stromdichte innerhalb des magnetischen Materials stetig sind. Demgegenüber springt die Tangentialkomponente der magnetischen Flussdichte \vec{B} unter den selben Voraussetzungen exakt um die Magnetisierungsoberflächenstromdichte \vec{K}^M , was durch Einsetzen der Materialbeziehung aus (2.4b) in (2.3b) ersichtlich ist. Die Richtungen der resultierenden Magnetisierungsoberflächenstromdichte \vec{K}^M sind in Abbildung 4.22b entlang einer Schnittebene $z=0$ dargestellt.

Um einen einzelnen Wert für die im nächsten Abschnitt durchgeführte Konvergenzanalyse zu generieren, wird der Induktivitätshub der Anordnung durch Ein-



(a) Geometrie



(b) Oberflächenstromdichte \vec{K}^M

Abbildung 4.22.: (a) Darstellung der Geometrie des Rings mit einem stromdurchflossenen Filament entlang der z -Achse. (b) Die resultierende Magnetisierungsoberflächenstromdichte \vec{K}^M in der Ebene $z=0$.

bringen des Ringkerns aus magnetischem Material ΔL_{Ring} bestimmt. Dieser ergibt sich als Differenz der Freirauminduktivität des Ringvolumens und der Induktivität des Ringvolumens gefüllt mit magnetischem Material

$$\Delta L_{\text{Ring}} = L_{\text{Ring}}|_{\mu_r > 1} - L_{\text{Ring}}|_{\mu_r = 1} \quad (4.10)$$

bei gleicher Anregung. Im Allgemeinen lässt sich die Induktivität aus dem Poynting-Theorem [11] durch

$$L = \frac{1}{I^2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dV \quad (4.11)$$

bestimmen, wobei bei linearem und isotropen magnetischem Material die Materialbeziehung aus (2.6b) gilt und die Integrationsgrenzen des Volumenintegrals in Zylinderkoordinaten sich zu $\rho = [R_1, R_2]$, $\varphi = [0, 2\pi]$ und $z = [-h/2, +h/2]$ ergeben. Durch Einsetzen des magnetischen Felds \vec{H} aus (4.9) in (4.11), Ausführen

des Integrals und Bestimmen der Differenz mit (4.10) ergibt sich

$$\Delta L_{\text{Ring}} = \mu_0(\mu_r - 1)h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \quad (4.12)$$

Es sei hier jedoch nochmals darauf verwiesen, dass dieses nur dadurch gilt, dass bei dieser speziellen Anordnung das magnetische Feld im Freiraum gleich dem magnetischen Feld mit Ringkern aus magnetischen Material ist.

Vergleich mit der MagPEEC-Methode

Der mit (4.12) analytisch bestimmte Induktivitätshub ΔL_{Ring} lässt sich mit der MQS-MagPEEC⁰-Methode wie folgt bestimmen: Vorerst wird die Freirauminduktivität eines ausgedehnten rechteckigen Leiters, welcher entlang der z -Achse angeordnet ist, mit der Dicke t_s , der Weite w_s und der Länge l mit der analytischen Lösung L_{mm}^{Eig} aus (A.3) bestimmt. Dabei ist entscheidend, dass der Querschnitt klein gegenüber dem Lochdurchmesser und die Länge lang gegenüber der Höhe h des Rings ist. Somit ist mit einer hinreichenden Genauigkeit gefordert, dass das resultierende magnetische Feld annähernd einem Feld eines Filaments entspricht. Die in (A.2) dargestellte Lösung der Induktivität eines Filaments ist hier nicht genutzt, da diese für die Eigeninduktivität Singular ist. Modelliert ist der Leiter mit ausschließlich einer PEEC-Volumenzelle und zwei Knoten. Anschließend wird die Induktivität des identischen Leiters mittels der MQS-MagPEEC⁰-Methode mit dem diskretisierten magnetischen Material des Ringkerns und anschließend der Induktivitätshub als Differenz beider Lösungen bestimmt.

Für die Anwendungen der MQS-MagPEEC⁰-Methode ist, da die Geometrie des Rings es erlaubt, nur ein Freiheitsgrad pro Oberflächenzelle zugelassen, womit sich die Anzahl der Freiheitsgrade von $2N_p$ auf N_p halbiert. Es ist anhand der in Abbildung 4.22b angedeuteten Richtungen der Magnetisierungsoberflächenströme deutlich, dass diese ausschließlich um den Ring herum fließen und somit diese Vereinfachung zulässig ist. Für die Diskretisierung des Ringkerns sind orthogonale und nicht-orthogonale Oberflächenzellen genutzt, sodass die in Abschnitt 3.8 auf Seite 70 beschriebene Multifunktions-Analyse unterschiedliche Verfahren zum Assemblieren der Matrixeinträge auswählt.

Um die in Abschnitt 3.10 beschriebenen Auslöschungsfehler an diesem Beispiel zu untersuchen, ist in Abbildung 4.23 der Induktivitätshub analytisch, mit der MQS-MagPEEC-Methode und der MQS-MagPEEC⁰-Methode gegenüber einer steigenden relativen Permeabilität μ_r aufgetragen. Es ist deutlich, dass, wie in Abschnitt 3.10 beschrieben, der Induktivitätshub und damit die magnetische Energie innerhalb des Rings stetig gegenüber der relativen Permeabilität steigt und ba-

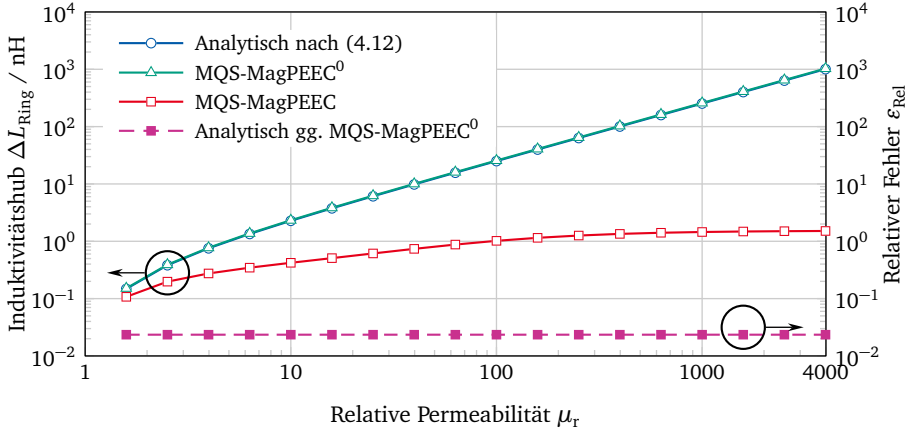


Abbildung 4.23.: Induktivitätshub der Ringgeometrie als Differenz der Freirauminduktivität gegenüber der Induktivität mit einem Ringkern aus magnetischem Material dargestellt über μ_r , wobei die Diskretisierung des Rings mit $N_p = 72$ Freiheitsgraden durchgeführt ist. Es sind die analytisch bestimmten Ergebnisse mit den Lösungen der MQS-MagPEEC-Methode und der MQS-MagPEEC⁰-Methode verglichen.

sierend auf den Auslöschungsfehlern die Amplituden der mit der MQS-MagPEEC-Methode bestimmten Magnetisierungsoberflächenströme nicht korrekt sind. Mittels dem neuen Ansatz der MQS-MagPEEC⁰-Methode, welcher in Abschnitt 3.10 beschrieben ist, lässt sich hingegen die korrekte Energie mit einem über μ_r konstanten relativen Fehler bestimmen.

Um detailliert zu untersuchen, dass der hier neu eingeführte Ansatz der MQS-MagPEEC⁰-Methode funktioniert, ist eine Konvergenzanalyse mit den in Tabelle 4.3 gelisteten Einstellungen durchgeführt. Dabei wird die Anzahl der Oberflächenelemente gleichmäßig in allen Diskretisierungsrichtungen des Ringkerns erhöht. Es ist in Abbildung 4.24 die zu erwartende Konvergenzordnung ersichtlich und damit die Funktion der vorgestellten Methode gezeigt. Im Folgenden wird die hier anhand eines akademischen Beispiels evaluierte MQS-MagPEEC⁰-Methode anhand eines praktischen Beispiels untersucht.

4.4.2 Anwendung an einer stromkompensierten Drossel

Nachdem im vorherigen Abschnitt die MQS-MagPEEC⁰-Methode für mehrfach zusammenhängende magnetische Gebiete anhand eines akademischen Beispiels evaluiert wurde, wird die Methode im Folgenden hinsichtlich einer stromkompensier-

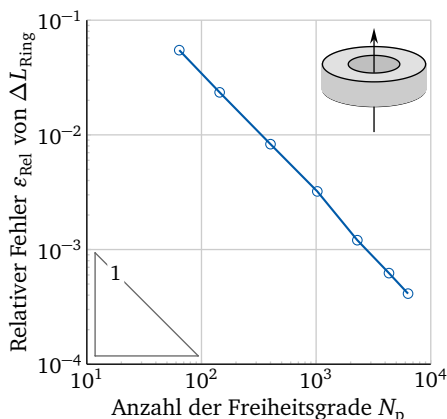


Abbildung 4.24.: Konvergenzstudie der MQS-MagPEEC⁰-Methode anhand des Ringkerns bezogen auf (4.12).

Tabelle 4.3.: Einstellungen der Geometrie für die in Abbildung 4.24 dargestellte Konvergenzanalyse und die in Abbildung 4.23 dargestellten Untersuchungen.

Bezeichnung	Wert
R_1	1,9 mm
R_2	3,15 mm
h	2,5 mm
l	1×10^3 mm
$w_S = t_S$	1×10^{-3} mm
μ_r	1.000

ten Drossel untersucht. Dabei werden die Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen.

Eine klassische stromkompensierte Drossel besteht typischerweise aus einem Ringkern aus magnetischem Material auf dem zwei Spulen aus isoliertem Kupferdraht gleichsinnig gewickelt sind. In diesem Beispiel ist das magnetische Material ein Ferrit, welcher durch eine Schicht Epoxidharz gegenüber den Kupferdrähten, die jeweils aus 10 Windungen bestehen, isoliert ist. Das Ferritmaterial weist eine ähnliche Frequenzabhängigkeit und Komplexwertigkeit auf, wie sie in Abbildung 4.8 in Abschnitt 4.2.1 dargestellt ist.

Im Allgemeinen werden stromkompensierte Drosseln für Filteranwendungen als passive Bauelemente eingesetzt, wobei sich grundsätzlich zwei unterschiedliche Betriebsarten ergeben. Zum einen fließt im Gleichtaktbetrieb (CM, engl. *Common Mode*) der selbe Strom gleichsinnig durch beide Spulen. Durch diesen Wicklungssinn der Kupferdrähte entsteht innerhalb des Ringkerns eine hohe magnetische Flussdichte, was zu einer hohen Induktivität und damit einem hohen Betrag der Torimpedanz $|\underline{Z}_{\text{Tor}}|$ führt. Im Gegensatz dazu wird bei dem Gegentaktbetrieb (DM, engl. *Differential Mode*) ein Strom in der einen Wicklung hin und in der anderen Wicklung entgegengesetzt geführt, sodass sich die magnetischen Flussdichten innerhalb des Ringkerns annähernd aufheben und somit der Betrag der Torimpedanz $|\underline{Z}_{\text{Tor}}|$ gering ist. In der Praxis wird dieses Verhalten ausgenutzt, um leitungsgeführte Störungen im Gleichtaktbetrieb im Sinne der elektromagnetischen Verträglichkeit zu dämpfen und differentielle Signale zuzulassen. Die stromkompensierte

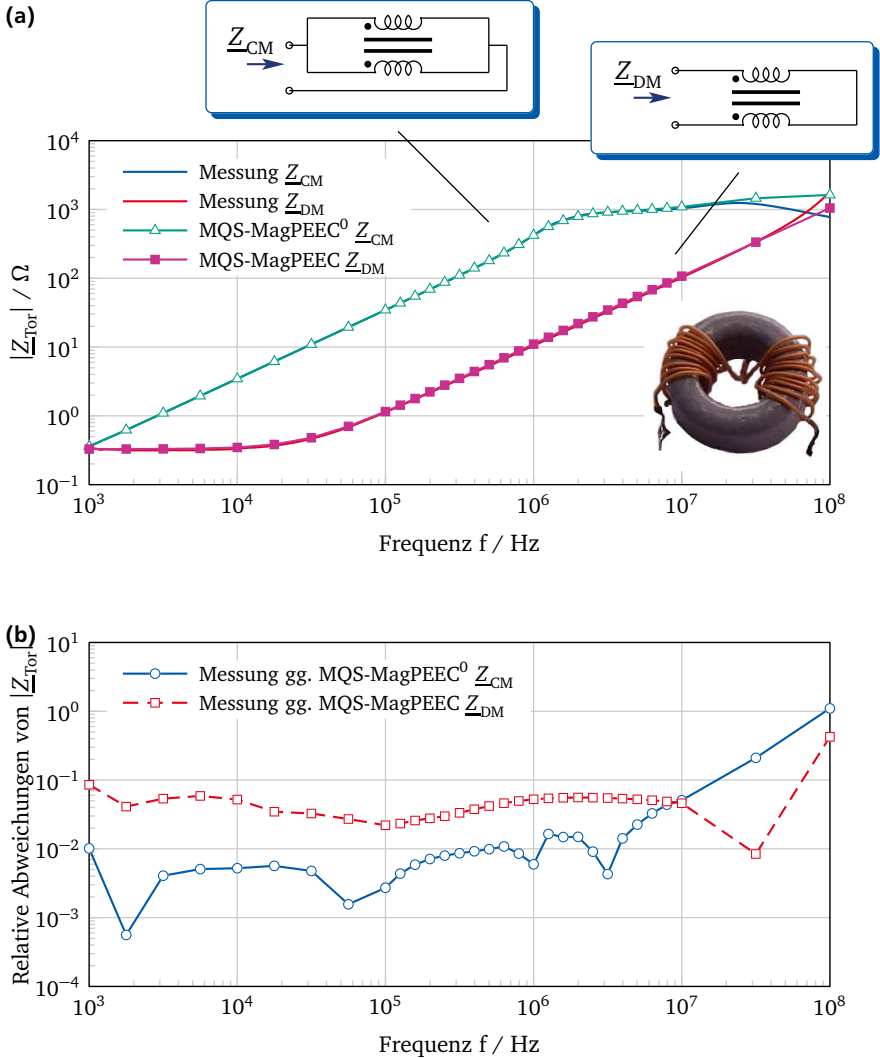
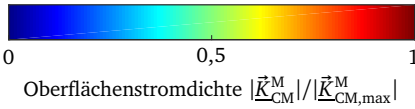
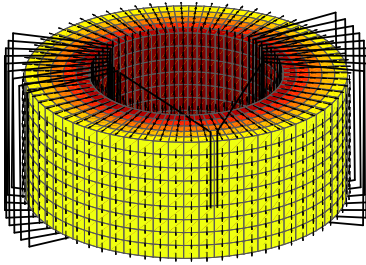


Abbildung 4.25.: Vergleich des Betrags der Torimpendanz $|Z_{\text{Tor}}|$ im Gleichtakt- und Gegentaktbetrieb. Es werden Simulationsergebnisse mit der MQS-MagPEEC-Methode im Gegentaktbetrieb und mit der MQS-MagPEEC⁰-Methode mit Messergebnissen verglichen. (a) Darstellung des Betrags der Torimpendanzen. (b) Darstellung der relativen Abweichungen der Messungen gegenüber den Simulationsergebnissen.

(a)



(b)

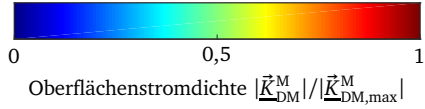
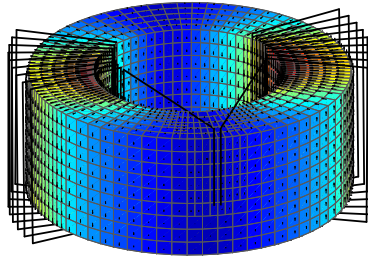


Abbildung 4.26.: Darstellung der Magnetisierungsoberflächenstromdichte der stromkompensierten Drossel, wobei das PEEC-Volumengitter der gewickelten Spule aus Darstellungsgründen vereinfacht als Linie visualisiert ist. (a) Magnetisierungsoberflächenstromdichte im Gleichtaktbetrieb mit Anwendung der MQS-MagPEEC⁰-Methode. (b) Magnetisierungsoberflächenstromdichte im Gegentaktbetrieb mit Anwendung der MQS-MagPEEC-Methode.

Drossel wird typischerweise in einem Frequenzbereich betrieben, in dem der Unterschied der Torimpedanz von dem Gleichtakt- gegenüber dem Gegentaktbetrieb am größten ist.

Die Messungen der Torimpedanz sind mittels des Impedanz-Analysators, welcher in Abschnitt 4.3.2 auf Seite 110 beschrieben ist, durchgeführt. Die Simulationen mit der MagPEEC-Methode sind mittels zwei unterschiedlicher Ansätze durchgeführt. Zum einen ist für die Simulation des Gleichtaktbetriebs aufgrund des symmetrischen Aufbaus eine Durchflutung des Ringkerns von $\underline{\Theta}_I = 10I_0$ und die speziell für mehrfach zusammenhängende Gebiete vorgestellte MQS-MagPEEC⁰-Methode basierend auf der konstanten Magnetisierung aus (4.8) eingesetzt. Die Durchflutung $\underline{\Theta}_I = 10I_0$ ergibt sich dadurch, dass die Drossel im Gleichtaktbetrieb mit zwei parallel geschalteten Spulen mit jeweils zehn Windungen und einem eingepprägten Strom I_0 betrieben wird. Zum anderen wird, da sich im Gegentaktbetrieb keine Durchflutung einstellt, die MQS-MagPEEC-Methode angewendet. Die Kupferdrähte sind jeweils mittels nicht-orthogonaler PEEC-Zellen, wie in Abbildung 3.11b in Abschnitt 3.9 dargestellt, modelliert und die Ecken sind nach der Methode ohne Überlappen nach Abbildung 3.13 diskretisiert. Die Simulations-

und Messergebnisse sind in Abbildung 4.25a und die relativen Abweichungen sind in Abbildung 4.25b dargestellt. Es lässt sich zusammenfassend anhand der relativen Abweichungen eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den Messungen feststellen. Dabei sind die geringen zu beobachtenden Abweichungen durch Fertigungstoleranzen der Kerngeometrie und Abweichungen der relativen Permeabilität des Ringkerns zu erklären. Hin zu höheren Frequenzen ergeben sich größere relative Abweichungen, welche durch das Auftreten kapazitiven Verhaltens begründet sind.

In Abbildung 4.26 sind die Magnetisierungsflächenstromdichten beider Betriebszustände dargestellt, wobei die Leiter aus Gründen der Übersichtlichkeit als Linien visualisiert sind. Dabei entsprechen die dargestellten Diskretisierungen denen, mit welchen die Simulationen für den Vergleich mit den Messergebnissen in Abbildung 4.25 durchgeführt sind. Deutlich ist, dass für eine ähnliche Genauigkeit bei der MQS-MagPEEC⁰-Methode im Gleichtaktbetrieb weniger Oberflächenelemente genutzt werden müssen und bei der MQS-MagPEEC-Methode im Gegentaktbetrieb die Algorithmen der adaptiven Gitterverfeinerung, welche in Abschnitt 3.8 auf Seite 78 beschrieben sind, eingesetzt werden. Zusammenfassend ist anhand des praktischen Beispiels die Funktion der MQS-MagPEEC⁰-Methode evaluiert, wobei nochmals erwähnt sei, dass die Bestimmung einer konstanten nur von der Durchflutung abhängigen Magnetisierung nach (4.8) nur ohne Weiteres für einfache Geometrien magnetischer Materialien möglich ist.



5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist eine spezielle Methode zur numerischen Bestimmung elektromagnetischer Felder von magnetischen passiven Bauteilen, wie sie heutzutage in hohen Stückzahlen in elektronischen Geräten eingesetzt werden, beschrieben und die Einsatzmöglichkeiten und Funktion anhand von akademischen und praktisch relevanten Beispielen untersucht. Die vorgestellte MagPEEC-Methode basiert auf der klassischen PEEC-Methode, welche mit einer Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien gekoppelt ist. Dabei sind die Vorteile und Grenzen der Formulierung und die Möglichkeit der Nutzung flexibler Gitter zur Modellierung komplexer Geometrien betrachtet, sodass möglichst effizient die magnetischen Bauteile simuliert werden können. Im Speziellen ist eine geringere Simulationszeit bei einem akademischen Beispiel gegenüber der FEM und ein Vergleich der Messergebnisse eines Leiterplattentransformators und einer stromkompensierten Drossel gezeigt, bei denen jeweils eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse erzielt wurde.

5.1 Beiträge dieser Arbeit

In diesem Abschnitt werden die Beiträge der Arbeit zusammengefasst vorgestellt.

Einleitend sind die grundlegenden Integralgleichungen auf Basis der Maxwell'schen Gleichungen und den quasistatischen Näherungen hergeleitet worden. Dabei wurde detailliert auf die Trennung der Magnetoquasistatik im Gegensatz zu der erweiterten Quasistatik eingegangen. Damit ließen sich die Grenzen und die weitreichenden Einsatzmöglichkeiten der Formulierung klar definieren und etwaige Abweichungen der im weiteren Verlauf vorgestellten Ergebnisse interpretieren und begründen.

Anschließend wurde die gekoppelte Formulierung aus einer Oberflächen- auf den magnetischen Materialien und einer Volumenintegraldarstellung der leitfähigen Gebiete auf orthogonalen und nicht-orthogonalen Gittern diskretisiert, wodurch eine flexible Modellierung von beliebigen Geometrien möglich ist.

Darauf aufbauend wurde auf spezielle Aspekte der Implementierung der MagPEEC-Methode eingegangen, wobei das Assemblieren der Systemmatrix hervorgehoben wurde, da dabei der höchste numerische Aufwand entsteht. Es wurde ein iterativer Algorithmus zur numerischen Integration und die spezielle Behandlung der integralen Ausdrücke von unterschiedlicher Regularität vorgestellt. Das

Resultat sind zwei Flussdiagramme, welche anhand der geometrischen Eigenschaften der Zellen eine möglichst effiziente Methode zur Berechnung der Integrale ergeben. Außerdem ist auf die Gittergenerierung eingegangen worden, welche eine effiziente Diskretisierung von Leiterstrukturen und einen Algorithmus zur Erstellung eines adaptiven Oberflächengitters beinhaltet. Abschließend wurden in diesem Kapitel die Auslöschungsfehler bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten und ein Ansatz zur Lösung bzw. zum Umgehen dieser numerischen Instabilität zumindest für einfache Geometrien vorgestellt.

Alle Aspekte und Varianten der MagPEEC-Methode wurden anhand von akademischen und praktisch relevanten Beispielen evaluiert. Zu Beginn ist mit einer Kugel in einem homogenen Magnetfeld die entkoppelte Oberflächenintegraldarstellung an magnetischen Materialien untersucht worden, wonach eine magnetische Platte unter einer Leiterplattenspule detailliert betrachtet worden ist. Dabei wurden Untersuchungen zur Simulationszeit im Gegensatz zur FEM durchgeführt und die Effizienz der MagPEEC-Methode anhand dieses Beispiels gezeigt. Im Anschluss wurden als praktisch relevante Beispiele ein Leiterplattentransformator und eine Drossel als typische passive magnetische Bauteile gerechnet und die Funktion der implementierten Methoden auch gegenüber Messergebnissen nachgewiesen.

5.2 Ausblick

Obwohl die vorgestellte MagPEEC-Methode im Verlauf der vorliegenden Arbeit für die Anwendung bei magnetischen passiven Bauteilen vorgestellt und evaluiert wurde, ergeben sich einige weitere Ansätze zur Verbesserung, welche weiter betrachtet werden könnten. Eine Auswahl dieser Ansätze sei hier vorgestellt.

Es könnte interessant sein, die implementierten Algorithmen zu optimieren und zu parallelisieren, sodass die Effizienz der Methoden noch weiter erhöht wird. Solche Ansätze wurden im Verlauf der Arbeit nicht betrachtet.

Auch das Assemblieren der Systemmatrix, wobei sich im Regelfall der höchste numerische Aufwand bei Simulationen mittels der MagPEEC-Methode ergibt, kann weiter optimiert werden. Einerseits könnte der Einsatz schneller Multipolverfahren, welche hinsichtlich der PEEC-Methode in [109, 110, 111] vorgestellt sind, oder der Einsatz einer vorkorrigierenden Fourier-Transformation nach [112, 113] untersucht werden. Andererseits könnte auf die im speziellen für Randelementmethoden eingesetzten hierarchischen Matrizen nach [64] oder auf die adaptive Quer-Annäherung (*engl. Adaptive-Cross-Approximation*) nach [114, 115] eingegangen werden. In diesem Zusammenhang stellt eine aktuelle Publikation den Ansatz der adaptiven Quer-Annäherung für die PEEC-Methode vor [116].

Darüber hinaus könnte eine Erweiterung auf nicht linearer Materialien zum Bei-

spiel durch Algorithmen der Fixpunktiteration [26] für die Randelementmethode oder durch eine Diskretisierung einer Volumenintegraldarstellung der magnetischen Materialien [38] untersucht werden. Die Volumenintegraldarstellung würde jedoch die zu Grunde liegenden Gleichungen der vorgestellten MagPEEC-Methode ändern und ein ganzheitlich neuen Forschungsschwerpunkt eröffnen.

Ein anderes Thema könnte für schnelle Frequenzbereichssimulationen die MOR [22, 66] im Speziellen für Aufgabenstellungen mit einer Vielzahl an Freiheitsgraden, bei welchen der numerische Aufwand zum Invertieren der Systemmatrix steigt, sein. Dabei wird die Systemmatrix in ein System verringerter Dimension unter Beibehaltung wichtiger Eigenschaften, wie Stabilität und Passivität und einem möglichst geringem Approximationsfehler transformiert.

Zudem sollte die in der vorliegenden Arbeit eingeführte und anhand eines Ringkerns aus magnetischem Material evaluierte MagPEEC⁰-Methode anhand anderer Kerngeometrien untersucht werden. Dementsprechend muss diese Lösung im Vorfeld durch ein anderes numerisches Verfahren bestimmt werden, wodurch sich die Fragestellung ergibt, ob die Methode dann noch im Gegensatz zu anderen numerischen Verfahren effizient ist und die Nutzung der MagPEEC-Methode für solche Problemstellungen sinnvoll ist.



A Geschlossene und teilanalytische Lösungen

In diesem Kapitel sind die geschlossenen und teilanalytischen Lösungen der integralen Ausdrücke vorgestellt, welche in Tabelle 3.1 auf Seite 47 zusammengefasst wurden. Es ist für einige Geometrien möglich, eine analytische Lösung der Integrale zu konstruieren, wobei die folgenden Ausführungen nicht alle Möglichkeiten, sondern nur die, in der vorliegenden Arbeit genutzten, Formulierungen beschreiben. Es sollte erwähnt werden, dass die Symbole, welche im Folgenden genutzt werden, nicht konsistent mit denen der vorherigen Kapitel sind, sondern auf den Symbolen der jeweiligen Publikation basieren und in Abbildungen gesondert dargestellt sind. Die Benennungen der Lösungen sind hingegen in Tabelle 3.3 auf Seite 69 eingeführt und hier jeweils wiederzufinden, sodass eine konsistente Zuordnung möglich ist.

A.1 Partielle Induktivität

Die partielle Induktivität zweier nicht-orthogonaler PEEC Volumenzellen ist im Allgemeinen durch das doppelte Volumenintegral

$$L_{mn} = \frac{\mu_0}{16} \int_a \int_b \int_c \int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') h_a h'_a (\vec{e}_a \cdot \vec{e}'_a) dc' db' da' dc db da, \quad (\text{A.1})$$

welches hier aus (3.36b) wiederholt ist, definiert, wobei diese Lösung einer Verallgemeinerung der Lösung für orthogonale Volumenzellen aus Tabelle 3.1 auf Seite 47 entspricht. Im Folgenden sind die teilanalytische Lösung für zwei infinitesimal dünne stromdurchflossenen Filamente, was einer Lösung der Integrationsgebiete a und a' entspricht, sowie die Lösung der Eigeninduktivität einer orthogonalen Zelle und der Koppelinduktivität zweier paralleler, orthogonaler Zellen vorgestellt.

Filamentenlösung

Die Lösung zweier stromdurchflossener Filamente, welche beliebig im Raum orientiert sein können und deren Parameter in Abbildung A.1 dargestellt sind, ergibt sich

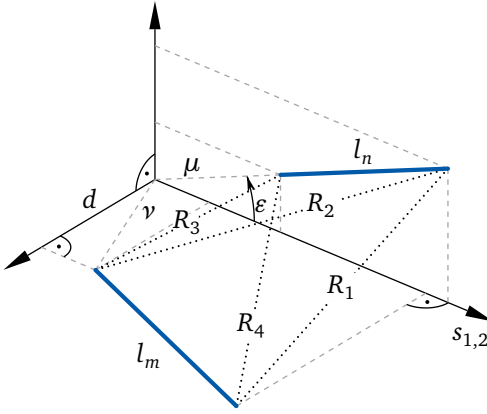


Abbildung A.1.: Darstellung der Parameter zweier beliebig im Raum orientierter Filamente.

als analytische Lösung für ein doppeltes Linienintegral. Um die Darstellung zu vereinfachen ist in Abbildung A.1 für jedes der zwei Filamente eine Fläche eingeführt, in der die Filamente liegen und welche sich in einem rechten Winkel schneiden. Damit ergibt sich die partielle Induktivität dieser Filamente zu [82]

$$L_{mn}^{\text{Fil}} = \frac{\mu_0 \cos \epsilon}{2\pi} \left[(\mu + l_n) \operatorname{arctanh} \left(\frac{l_m}{R_1 + R_2} \right) + (\nu + l_m) \operatorname{arctanh} \left(\frac{l_n}{R_1 + R_4} \right) - \mu \operatorname{arctanh} \left(\frac{l_m}{R_3 + R_4} \right) - \nu \operatorname{arctanh} \left(\frac{l_n}{R_2 + R_3} \right) - \frac{\Omega d}{2 \sin \epsilon} \right], \quad (\text{A.2a})$$

wobei die eingeführte Größe Ω durch

$$\Omega = \operatorname{arctan} \left(\frac{d^2 \cos \epsilon + (\mu + l_n)(\nu + l_m) \sin^2 \epsilon}{d R_1 \sin \epsilon} \right) + \operatorname{arctan} \left(\frac{d^2 \cos \epsilon + \mu \nu \sin^2 \epsilon}{d R_3 \sin \epsilon} \right) - \operatorname{arctan} \left(\frac{d^2 \cos \epsilon + (\mu + l_n) \nu \sin^2 \epsilon}{d R_2 \sin \epsilon} \right) - \operatorname{arctan} \left(\frac{d^2 \cos \epsilon + \mu (\nu + l_m) \sin^2 \epsilon}{d R_4 \sin \epsilon} \right) \quad (\text{A.2b})$$

gegeben ist. Ähnliche Lösungen sind auch von früheren Autoren (z. B. [117]) vorgestellt worden, wohingegen die Behandlung numerischer Instabilitäten zum Beispiel durch Berührung der Filamente erst in [82] zu finden ist. Diese Lösung kann über den Einsatz bei der Bestimmung der partiellen Induktivität nach (A.1) hinaus auch

als teilanalytische Lösung der Gegeninduktivität der Oberflächenelemente an magnetischen Materialien gegenüber den Volumenzellen aus (3.38a) genutzt werden.

Eigeninduktivität einer orthogonalen Zelle

Das Bestimmen der Eigeninduktivität kann als Sonderfall von (A.1) betrachtet werden, bei dem die gestrichenen Integrationsgebiete identisch mit den ungestrichenen Gebieten sind, und somit die Integration zweifach über das gleiche Volumen ausgeführt wird. Ist die Volumenzelle orthogonal und die Parameter sind entsprechend Abbildung A.2a definiert, ergibt sich nach [32]

$$\begin{aligned}
 L_{mm}^{\text{Eig}} = l_m \frac{2\mu_0}{\pi} & \left(\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\tilde{w}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{w}}{\alpha_t} \right) + \frac{1}{\tilde{t}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{t}}{\alpha_w} \right) + \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \right. \\
 & + \frac{1}{24} \left[\frac{\tilde{t}^2}{\tilde{w}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{t}\alpha_t(r+\alpha_r)} \right) + \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{w}\alpha_w(r+\alpha_r)} \right) \right. \\
 & + \frac{\tilde{t}^2}{\tilde{w}^2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}r(\alpha_t+\alpha_r)} \right) + \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{t}^2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{t}^2}{\tilde{w}r(\alpha_w+\alpha_r)} \right) \\
 & + \frac{1}{\tilde{w}\tilde{t}^2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{w}\tilde{t}^2}{\alpha_t(\alpha_w+\alpha_r)} \right) + \frac{1}{\tilde{t}\tilde{w}^2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\tilde{t}\tilde{w}^2}{\alpha_w(\alpha_t+\alpha_r)} \right) \Big] \\
 & - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{\tilde{w}\tilde{t}} \arctan \left(\frac{\tilde{w}\tilde{t}}{\alpha_r} \right) + \frac{\tilde{t}}{\tilde{w}} \arctan \left(\frac{\tilde{w}}{\tilde{t}\alpha_r} \right) + \frac{\tilde{w}}{\tilde{t}} \arctan \left(\frac{\tilde{t}}{\tilde{w}\alpha_r} \right) \right] \\
 & - \frac{1}{60} \left[\frac{(\alpha_r+r+\tilde{t}+\alpha_t)\tilde{t}^2}{(\alpha_r+r)(r+\tilde{t})(\tilde{t}+\alpha_t)(\alpha_t+\alpha_r)} + \frac{(\alpha_r+r+\tilde{w}+\alpha_w)\tilde{w}^2}{(\alpha_r+r)(r+\tilde{w})(\tilde{w}+\alpha_w)(\alpha_w+\alpha_r)} \right. \\
 & \left. + \frac{(\alpha_r+\alpha_w+1+\alpha_t)}{(\alpha_r+\alpha_w)(\alpha_w+1)(\alpha_t+1)(\alpha_t+\alpha_r)} \right] - \frac{1}{20} \left[\frac{1}{r+\alpha_r} + \frac{1}{\alpha_w+\alpha_r} + \frac{1}{\alpha_t+\alpha_r} \right] \Bigg), \tag{A.3a}
 \end{aligned}$$

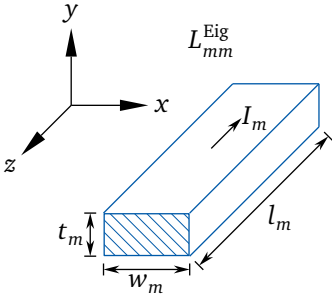
wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit die normierte Weite $\tilde{w} = w_m/l_m$ und Dicke $\tilde{t} = t_m/l_m$ sowie die folgenden Abkürzungen

$$r = \sqrt{\tilde{w}^2 + \tilde{t}^2} \quad \alpha_w = \sqrt{\tilde{w}^2 + 1}, \quad \alpha_t = \sqrt{\tilde{t}^2 + 1}, \quad \alpha_r = \sqrt{\tilde{w}^2 + \tilde{t}^2 + 1} \tag{A.3b}$$

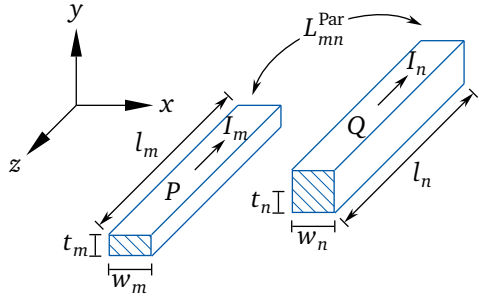
eingeführt sind.

Induktivität für zwei parallele rechteckige Zellen

Sind zwei orthogonale Volumenzellen parallel entsprechend Abbildung A.2b angeordnet, wurde eine Lösung des sechsfachen Integrals aus (A.1) in [118] vor-



(a) Eigeninduktivität



(b) Gegeninduktivität paralleler Zellen

Abbildung A.2.: Darstellung der Geometrischen Parameter für die analytischen Lösungen. (a) Eigeninduktivität einer orthogonalen Volumenzelle. (b) Gegeninduktivität zweier paralleler und orthogonaler Volumenzellen.

gestellt, welche auf der Lösung von 64 gewichteten Eigeninduktivitäten virtueller Volumenzellen basiert. Es ergibt sich durch die Überlagerung der Lösung für die Eigeninduktivitäten (A.3) nach [118]

$$L_{mn}^{\text{Par}} = \frac{1}{w_m t_m w_n t_n} \frac{1}{8} \sum_{i_0 j_0 k_0 i_1 j_1 k_1 = 0}^1 (-1)^{i_0 + i_1 + j_0 + j_1 + k_0 + k_1 + 1} A_{P_{i_0 j_0 k_0} Q_{i_1 j_1 k_1}}^2 L_{P_{i_0 j_0 k_0} Q_{i_1 j_1 k_1}}^{\text{Eig}}, \quad (\text{A.4})$$

wobei $P_{i_0 j_0 k_0}$ allen Eckpunkten der ersten und $Q_{i_1 j_1 k_1}$ allen Eckpunkten der zweiten Volumenzelle entsprechen. Die Indizierung der Eckpunkte ergibt sich durch alle 64 Variationen der Parameter $i_0, j_0, k_0, i_1, j_1, k_1$ mit 1 und 0, wobei $L_{P_{i_0 j_0 k_0} Q_{i_1 j_1 k_1}}^{\text{Eig}}$ dementsprechend den unterschiedlichen Eigeninduktivitäten und $A_{P_{i_0 j_0 k_0} Q_{i_1 j_1 k_1}}$ den unterschiedlichen Flächeninhalten der virtuellen Zellen entsprechen. Obwohl manche der 64 Eigeninduktivitäten im Allgemeinen null ergeben können, da die virtuellen Zellen z. B. infinitesimal dünn sind, multipliziert sich der numerische Aufwand gegenüber der Bestimmung einer einzelnen Eigeninduktivität mit 64. Dennoch ist diese Formulierung gegenüber anderen Lösungen (z. B. [119]) bevorzugt, da diese eine höhere numerische Robustheit, insbesondere bei hohen Aspektverhältnissen der Zellen zueinander, aufweist.

A.2 Partieller Potentialkoeffizient

Wie in Abschnitt 3.8 auf Seite 60 beschrieben, werden für die Potentialkoeffizienten im Verlauf der vorliegenden Arbeit aufgrund der Nutzung von Leiterplattenstrukturen ausschließlich Oberflächengitter eingeführt und damit das doppelte Volumenintegral aus (3.36c) auf ein doppeltes Oberflächenintegral reduziert. Im Allgemeinen ergibt sich für zwei nicht-orthogonale Oberflächenzellen somit

$$P_{iq} = \frac{1}{\varepsilon_0 16} \int_a \int_b \int_{a'} \int_{b'} \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') db' da' db da, \quad (\text{A.5})$$

was aus (3.41b) wiederholt ist. Im Folgenden sind die teilanalytische Lösung einer orthogonalen Oberflächenzelle zu einem Punkt, die geschlossene Lösung für zwei parallele Oberflächenzellen und die Lösung für zwei senkrecht zueinander stehenden Oberflächenzellen vorgestellt.

Fläche zu Punkt

Die Lösung der Integration über die Gebiete a' und b' in (A.5) auf Basis einer orthogonalen Oberflächenzelle ergibt nach [84]

$$P_{iq}^{\text{Pun}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (f(\alpha_1, \beta_1) - f(\alpha_2, \beta_2) - f(\alpha_3, \beta_3) + f(\alpha_4, \beta_4)) \quad (\text{A.6a})$$

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\beta}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \right) + \frac{\alpha}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}{1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \right) \quad (\text{A.6b})$$

mit den Wertepaaren

$$\alpha_1 = x_k - x_{l+1} \quad \text{und} \quad \beta_1 = y_k - y_{l+1} \quad (\text{A.6c})$$

$$\alpha_2 = x_k - x_{l+1} \quad \text{und} \quad \beta_2 = y_k - y_l \quad (\text{A.6d})$$

$$\alpha_3 = x_k - x_l \quad \text{und} \quad \beta_3 = y_k - y_{l+1} \quad (\text{A.6e})$$

$$\alpha_4 = x_k - x_l \quad \text{und} \quad \beta_4 = y_k - y_l, \quad (\text{A.6f})$$

wobei x_k und y_k den Koordinaten des Auswertepunkts und x_l, x_{l+1} bzw. y_l, y_{l+1} den Koordinaten der Eckpunkte der orthogonalen Zelle entsprechen. Es sei hier erwähnt, dass ähnliche Formulierungen in [5, 60, 83] vorgestellt sind.

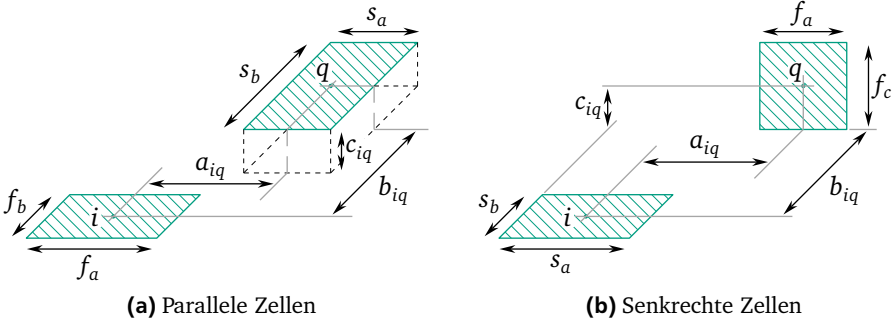


Abbildung A.3.: Geometrie der parallelen und senkrechten Anordnung zweier Oberflächenzellen für die analytische Bestimmung der Potentialkoeffizienten basierend auf [5].

Potentialkoeffizienten parallel angeordneter Oberflächenzellen

Für zwei parallel angeordnete, orthogonale Oberflächenzellen – wie in Abbildung A.3a dargestellt – ergibt sich der partielle Potentialkoeffizient als Lösung des integralen Ausdrucks (A.5) nach [5] zu

$$P_{iq}^{\text{Par}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 f_a f_b s_a s_b} \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^4 (-1)^{k+m} \left[\frac{b_m^2 - c_{iq}^2}{2} a_k \ln(a_k + \varrho) - \frac{1}{6} (b_m^2 - 2c_{iq}^2 + a_k^2) \varrho \right. \\ \left. + \frac{a_k^2 - c_{iq}^2}{2} b_m \ln(b_m + \varrho) - b_m c_{iq} a_k \arctan\left(\frac{a_k b_m}{\varrho c_{iq}}\right) \right], \quad (\text{A.7a})$$

wobei die folgenden Abkürzungen verwendet wurden:

$$\varrho = \sqrt{a_k^2 + b_m^2 + c_{iq}^2}, \quad (\text{A.7b})$$

$$\mathbf{a} = \left[a_{iq} - \frac{f_a}{2} - \frac{s_a}{2}, a_{iq} + \frac{f_a}{2} - \frac{s_a}{2}, a_{iq} + \frac{f_a}{2} + \frac{s_a}{2}, a_{iq} - \frac{f_a}{2} + \frac{s_a}{2} \right], \quad (\text{A.7c})$$

$$\mathbf{b} = \left[b_{iq} - \frac{f_b}{2} - \frac{s_b}{2}, b_{iq} + \frac{f_b}{2} - \frac{s_b}{2}, b_{iq} + \frac{f_b}{2} + \frac{s_b}{2}, b_{iq} - \frac{f_b}{2} + \frac{s_b}{2} \right]. \quad (\text{A.7d})$$

Es sei erwähnt, dass für orthogonale koplanare Oberflächenzellen eine alternative Formulierung in [120] und darüber hinaus eine Lösung für nicht-orthogonale koplanare Oberflächenzellen in [121] vorgestellt wurde. In der vorliegende Arbeit sind jedoch ausschließlich orthogonale Oberflächengitter eingesetzt, die sich

auf unterschiedlichen Lagen einer Leiterplattenstruktur befinden (vgl. Beispiel des Plattentransformators in Abschnitt 4.3), sodass die Lösung aus (A.7) bei dieser Anwendung für eine Vielzahl von Koppeltermen genutzt wird.

Die Eigenterme der Potentialmatrix, welche sich durch die doppelte Oberflächenintegration über einer Zelle ergeben, lassen sich darüber hinaus auch mittels (A.7) bestimmen.

Potentialkoeffizienten senkrecht angeordneter Oberflächenzellen

Wenn zwei orthogonale Oberflächenzellen senkrecht zueinander orientiert sind – wie in Abbildung A.3b dargestellt – kann die Lösung des Potentialkoeffizienten nach [5]

$$P_{iq}^{\text{Orrt}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 f_a f_c s_a s_b} \sum_{k=1}^4 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^{k+m+l+1} \left[\left(\frac{a_k^2}{2} - \frac{c_l^2}{6} \right) c_l \ln(b_m + \varrho) - \frac{b_m c_l}{3} \varrho + \left(\frac{a_k^2}{2} - \frac{b_m^2}{6} \right) b_m \ln(c_l + \varrho) + a_k b_m c_l \ln(a_k + \varrho) - \frac{a_k^3}{6} \arctan\left(\frac{b_m c_l}{a_k \varrho}\right) - \frac{b_m^2 a_k}{2} \arctan\left(\frac{a_k c_l}{b_m \varrho}\right) - \frac{a_k c_l^2}{2} \arctan\left(\frac{a_k b_m}{c_l \varrho}\right) \right] \quad (\text{A.8a})$$

konstruiert werden, wobei ϱ und \mathbf{a} gleich zu (A.7b) und (A.7c) und darüber hinaus

$$\mathbf{b} = \left[b_{iq} + \frac{s_b}{2}, b_{iq} - \frac{s_b}{2} \right], \quad \mathbf{c} = \left[c_{iq} + \frac{f_c}{2}, c_{iq} - \frac{f_c}{2} \right] \quad (\text{A.8b})$$

eingeführt sind.

A.3 MagPEEC-Elemente

Die integralen Ausdrücke der MagPEEC-Methode besitzen einen grundsätzlich anderen Integralkern, welcher den Gradienten der Green'schen Funktion in der Quasistatik beinhaltet. Dem Autoren sind keine geschlossenen Formulierungen der hier

wiederholten integralen Ausdrücke

$$T_{vu}^{\mu} = \frac{1}{4} \int_a \int_b h_a \vec{e}_a \cdot \left\{ \left(\int_{a'} \int_{b'} h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a db' da' \right) \times \vec{e}_c \right\} db da \quad (\text{A.9a})$$

$$T_{vn}^{\kappa\mu} = \frac{1}{8} \int_a \int_b h_a \vec{e}_a \cdot \left\{ \left(\int_{a'} \int_{b'} \int_{c'} h'_a \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}'_a dc' db' da' \right) \times \vec{e}_c \right\} db da \quad (\text{A.9b})$$

bekannt. Dementgegen können für die gestrichenen Integrationsgebiete der Quellen teilanalytische Lösungen gefunden und über die ungestrichenen Integrationsgebiete numerisch integriert werden. Wie in (A.9) deutlich, sind die Lösungen der in geschweiften Klammern dargestellten Ausdrücke vektoriell und können als Lösung des Biot-Savart-Gesetzes (vgl. [11, Kap. 5.2]) eines Oberflächenstroms in (A.9a) und eines Volumenstroms in (A.9b) interpretiert werden. Zu diesem Thema gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen, wobei hier die in dieser Arbeit eingesetzten Formulierungen vorgestellt werden.

Magnetische Flussdichte eines Filaments

Es wird in (A.9) analytisch über das Integrationsgebiet a' integriert, wobei hier die kompakte Darstellung

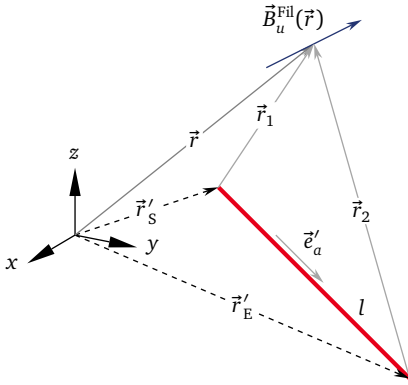
$$\vec{B}^{\text{Fil}}(\vec{r}) = \frac{l(r_1 + r_2)(\vec{e}'_a \times \vec{r}_1)}{2\pi r_1 r_2 [(r_1 + r_2)^2 - l^2]} \quad (\text{A.10a})$$

mit den folgenden Abkürzungen

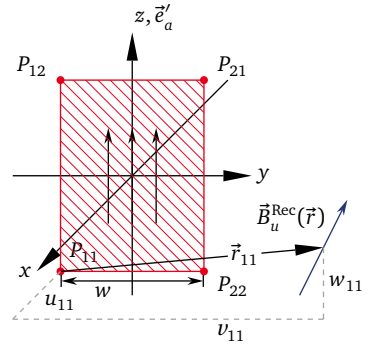
$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}'_S, \quad r_1 = |\vec{r}_1|, \quad (\text{A.10b})$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}'_E, \quad r_2 = |\vec{r}_2| \quad (\text{A.10c})$$

aus [85] gewählt ist. Eine Visualisierung dieser Geometrie und der zugehörigen Parameter ist Abbildung A.4a zu entnehmen.



(a) Filament



(b) Oberflächenzelle

Abbildung A.4.: Geometrie des Filaments und der orthogonalen Oberflächenzelle für die analytische Bestimmung der MagPEEC Koeffizienten.

Magnetische Flussdichte einer orthogonalen Oberflächenzelle

Ist eine orthogonale Oberflächenzelle entsprechend der Anordnung in Abbildung A.4b gegeben, so lässt sich nach [86] die magnetische Flussdichte im Raum mit

$$\vec{B}^{\text{Rec}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi w} \sum_{ij=1}^2 (-1)^{i+j} \begin{bmatrix} \arctan\left(\frac{u_{ij}w_{ij}}{v_{ij}r_{ij}}\right) \\ \ln|w_{ij} + r_{ij}| \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

bestimmen, wobei $\vec{r}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij})^T$ und $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ dem Abstand zum Aufpunkt des Felds und P_{ij} den vier Eckpunkten der Oberflächenzelle entspricht.

Magnetische Flussdichte einer orthogonalen Volumenzelle

Ist eine orthogonale Volumenzelle nach der Anordnung in Abbildung A.5 gegeben,

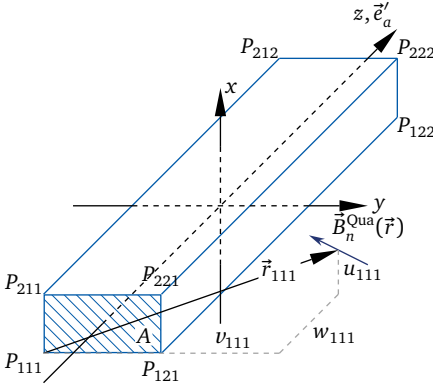


Abbildung A.5.: Darstellung zur Berechnung der magnetischen Flussdichte einer orthogonalen Volumenzelle.

so lässt sich die magnetische Flussdichte im Raum mit [86]

$$\vec{B}^{\text{Qua}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi A} \sum_{ijk=1}^2 (-1)^{i+j+k} \begin{bmatrix} -u_{ijk} \ln |w_{ijk} + r_{ijk}| - w_{ijk} \ln |u_{ijk} + r_{ijk}| + v_{ijk} \arctan \left(\frac{u_{ijk} w_{ijk}}{v_{ijk} r_{ijk}} \right) \\ v_{ijk} \ln |w_{ijk} + r_{ijk}| + w_{ijk} \ln |v_{ijk} + r_{ijk}| - u_{ijk} \arctan \left(\frac{v_{ijk} w_{ijk}}{u_{ijk} r_{ijk}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

bestimmen. Dabei entsprechen $\vec{r}_{ijk} = (u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk})^T$ mit $r_{ijk} = |\vec{r}_{ijk}|$ den Abständen von den Eckpunkten zu dem Aufpunkt und P_{ijk} den Eckpunkten der orthogonalen Volumenzelle.

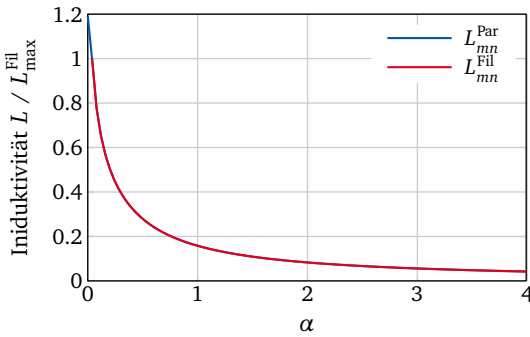
B Ausgewählte Untersuchungen

In diesem Kapitel werden einige Untersuchungen anhand ausgewählter Beispiele vorgestellt, sodass einzelne Annahmen der vorliegenden Arbeit begründet und unterstützt werden können. Nachdem die Koppelinduktivität in Abhängigkeit des eingeführten Abstandsverhältnisses anhand zweier paralleler, orthogonaler Volumenzellen untersucht wurde, wird die in Abbildung 3.10 auf Seite 73 vorgestellte Wahl der Quadratur begründet auf der Effizienz für die Kopplung zweier orthogonaler Oberflächenzellen gezeigt.

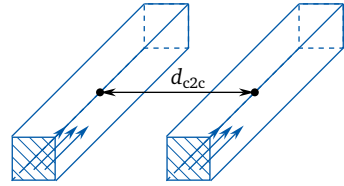
B.1 Induktivität in Abhängigkeit vom Abstandsverhältnis

In diesem Abschnitt ist die Nutzung des Abstandsverhältnis $\alpha = d_{c2c}/l_{\text{diag,max}}$, welches in (3.47) auf Seite 67 definiert ist und wobei d_{c2c} dem Abstand der Mittelpunkte der Zellen und $l_{\text{diag,max}}$ der Länge der maximalen Diagonale beider Zellen entspricht, zur Reduktion der numerischen Kosten untersucht. Dazu wird – wie in Abbildung B.1b dargestellt – die Gegeninduktivität zweier orthogonaler Volumenzellen in Abhängigkeit des Abstandsverhältnisses berechnet. Bei dem Ablauf des Algorithmus des Mutlifunktions-Ansatzes für die partiellen Induktivitäten in Abbildung 3.9 werden Gegeninduktivitäten mit einem hohem Abstandsverhältnis mit einer approximierten Lösung als Kopplung zweier infinitesimal dünner Filamente bestimmt. Bei dieser speziellen Geometrie entspricht dieses dem Austausch der geschlossenen analytischen Lösung L_{mn}^{Par} nach (A.2) aus Abschnitt A.1 durch die approximierte Lösung L_{mn}^{Fil} nach (A.3) aus Abschnitt A.1. Die normierte Gegeninduktivität ist in Abhängigkeit von dem Abstandsverhältnis in Abbildung B.1a dargestellt, wobei die typische Abnahme des Werts deutlich ist. Um die Unterschiede der beiden Lösungen detailliert zu betrachten ist in Abbildung B.1c der relative Fehler der approximierten Lösung L_{mn}^{Fil} gegenüber der exakten Lösung L_{mn}^{Par} dargestellt. Dabei nimmt dieser hin zu höheren Abstandsverhältnissen ab, sodass in Abhängigkeit der Gesamtgenauigkeit ein Ersetzen der exakten Lösung mit der approximierten Lösung ab einem festen Abstandsverhältnis möglich ist.

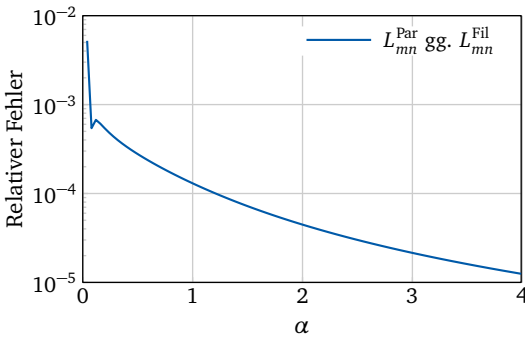
Dieses Verhalten ist hier anhand eines Beispiels gezeigt, wobei bei den weiteren integralen Ausdrücken der MagPEEC-Methode ähnliche Zusammenhänge ausgenutzt werden. Die in Abbildung B.1c geringen relativen Fehler im Bereich von



(a) Induktivität



(b) Geometrie



(c) Relativer Fehler

Abbildung B.1.: Darstellung der Gegeninduktivität zweier paralleler Volumenzellen mit der geschlossen analytischen Lösung L_{mn}^{Eig} im Gegensatz zu der numerischen Lösung L_{mn}^{Num} mit der Integrationsordnung $N = 1$ in Abhängigkeit des Abstandsverhältnisses $\alpha = d_{c2c}/l_{\text{diag,max}}$. (a) Absolute Induktivität. (b) Geometrie. (c) Relativer Fehler.

1×10^{-3} bis 1×10^{-5} können jedoch je nach Kopplung und Geometrie der Zellen höher ausfallen und dementsprechend werden für die praktischen Beispiele in Kapitel 4 großzügigste maximale Abstandsverhältnisse im Bereich von 0,1 bis 1 gewählt. Dennoch ist die Reduktion des numerischen Aufwands erheblich und ein Einführen des maximalen Abstandsverhältnis, ab dem eine approximierte Lösung genutzt wird, für eine effiziente Implementierung sinnvoll.

B.2 Vergleich der Nutzung verschiedener Quadraturen

In diesem Abschnitt ist ein Vergleich der beiden in der vorliegenden Arbeit genutzten unterschiedlichen Quadraturen gezeigt. Es werden, wie in Abschnitt 3.8 beschrieben, die summierte Mittelpunktsregel (MR) und die Gauß-Legendre-Quadratur (GL) eingesetzt. Es wird in Abschnitt 3.8 auf Seite 65 darauf verwiesen,

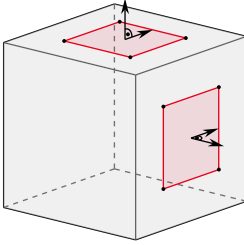
dass für Integralkerne niedriger Regularität die Nutzung der summierten MR im Gegensatz zu der GL effizient sei und bei hoher Regularität der entgegengesetzte Fall eintritt. Dieses ist hier anhand eines Beispiels der Kopplung zweier orthogonaler Oberflächenzellen bei zwei unterschiedlichen Abständen an einer 90°-Kante untersucht, wobei die Geometrien in Abbildung B.2a und Abbildung B.2b visualisiert sind. Dabei ergibt sich bei der Berührung der beiden Zellen ein Integralkern niedriger Regularität und bei der Erhöhung der Entfernung der Oberflächenzellen eine dementsprechende Erhöhung der Regularität. Der hier untersuchte integrale Ausdruck ist hier durch

$$T_{vu}^{\mu} = \frac{\mu_0}{w_v w_u} \vec{e}_v \cdot \left\{ \int_{S_v} \left(\oint_{S'_u} \text{grad } \widehat{G}(\vec{r}, \vec{r}') \times \vec{e}_u dA' \right) \times \vec{n}_v \right\} dA \quad (\text{B.1})$$

wiederholt. Es werden für diese Untersuchung alle der vier Integrationsgebiete numerisch integriert, obwohl dieses aufgrund der Orthogonalität der Zellen nicht Effizient ist, jedoch ein passendes Beispiel für die Untersuchung der verschiedenen Quadraturen ergibt.

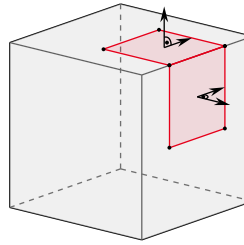
Die Ergebnisse der benötigten Anzahl der Stützstellen in Abhängigkeit der eingestellten Genauigkeit s als Grenze bei der Nutzung des Algorithmus 1 auf Seite 67 sind in Abbildung B.2c und Abbildung B.2d dargestellt. Es ist ersichtlich, dass für die identische Genauigkeit bei nicht-Berühren der Oberflächenzellen die summierte Mittelpunktsregel mehr Stützstellen und somit mehr Funktionsauswertungen benötigt, wohingegen bei Berührung ein entgegengesetztes Verhalten zu beobachten ist. Somit ist anhand dieses minimalen Beispiels gezeigt, dass die Wahl einer hinsichtlich des Integrationskerns effizienten Quadratur sinnvoll ist. Dieses wird in dem Mutlifunktions-Ansatz, welcher in Abbildung 3.10 auf Seite 73 vorgestellt ist, für den hier wiederholten integralen Ausdruck (B.1) durchgeführt und steigert die Effizienz der MagPEEC-Methode.

(a)

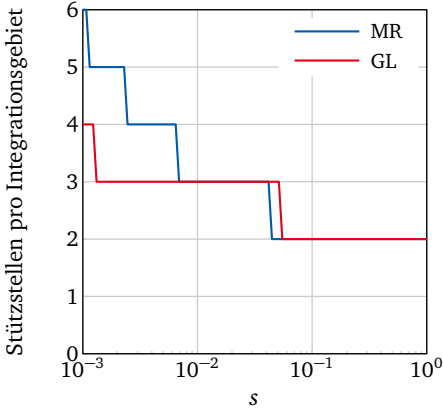


keine
Berührung

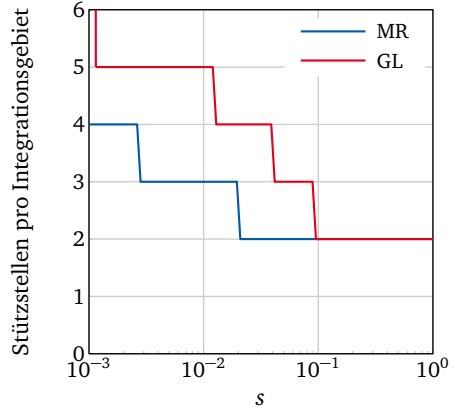
(b)



Berührung



(c) Keine Berührung



(d) Berührung

Abbildung B.2.: Darstellung der Untersuchungen zu der iterativen Wahl der Anzahl der Stützstellen des Approximationspolynoms bei der vierfachen numerischen Integration des Ausdrucks T_{vu}^μ in Abhängigkeit von der Genauigkeit s und der gewählten Quadratur anhand eines Beispiels mit zwei unterschiedlichen geometrischen Anordnungen zweier Oberflächenzellen. Dazu ist Algorithmus 1, welcher auf Seite 67 dargestellt ist, verwendet. (a) Geometrische Lage der Oberflächenzellen ohne Berührung. (b) Geometrische Lage der Oberflächenzellen bei Berührung. (c) Gewählte Anzahl an Stützstellen in Abhängigkeit der Genauigkeit s bei den unterschiedlichen Quadraturen ohne Berührung. (d) Gewählte Anzahl an Stützstellen in Abhängigkeit der Genauigkeit s bei den unterschiedlichen Quadraturen in Berührung.

Abkürzungen und Symbole

Abkürzungen

EFIE	Integralgleichung des elektrischen Felds (<i>engl. Electric Field Integral Equation</i>)
EQS	Elektroquasistatik
FEM	Finite-Elemente-Methode
FEMM	Computerprogramm basierend auf der 2D-Finite-Elemente-Methode (<i>engl. Finite-Element-Method-Magnetics</i>) [104]
GL	Gauß-Legendre-Quadratur
MagPEEC-Methode	Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien (<i>engl. Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method</i>)
MagPEEC ⁰ -Methode	Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien für mehrfach zusammenhängende Gebiete (<i>engl. Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method for Closed Domains</i>)
MFIE	Integralgleichung des magnetischen Felds (<i>engl. Magnetic Field Integral Equation</i>)
MNA	Modifiziertes Knotenadmittanzverfahren (<i>engl. Modified Nodal Approach</i>)
MOR	Modelordnungsreduktionsverfahren
MPIE	Integralgleichung der gemischten Potentiale (<i>engl. Mixed Potential Integral Equation</i>)
MQS	Magnetoquasistatik

MQS-MagPEEC-Methode	Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien in der Magnetoquasistatik (<i>engl. Magneto-Quasi-Static – Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method</i>)
MQS-MagPEEC ⁰ -Methode	Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien für mehrfach zusammenhängende Gebiete in der Magnetoquasistatik (<i>engl. Magneto-Quasi-Static – Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method for Closed Domains</i>)
MR	Mittelpunktsregel
PEEC-Methode	Methode der partiellen Elemente (<i>engl. Partial Element Equivalent Circuit Method</i>)
QS	Quasistatik
QS-MagPEEC-Methode	Methode der partiellen Elemente mit magnetischen Materialien in der Quasistatik (<i>engl. Quasi-Static – Magnetic Partial Element Equivalent Circuit Method</i>)
SPICE	Simulationsprogramm mit Schwerpunkt auf integrierte Schaltkreise (<i>engl. Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis</i>)

Generelle Symbole und Konventionen

Notation	Beschreibung
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\Im	Imaginärer Anteil einer komplexen Zahl
\lim	Grenzwert einer Funktion oder eines Raums
\max	Maximum einer Funktion oder eines Raums
\Re	Realer Anteil einer komplexen Zahl
\mathbf{X}	Matrix
$\mathbf{x}, \mathbf{x}^\top$	Zeilen- und Spaltenvektoren (transponiert)
\vec{x}	Räumlicher Vektor in \mathbb{R}^3
$\vec{x} \cdot \vec{y}$	Skalarprodukt der Vektoren \vec{x} und \vec{y}
$\vec{x} \times \vec{y}$	Vektorprodukt der Vektoren \vec{x} und \vec{y}
\underline{x}	Komplexe Größe
\underline{x}^*	Komplex konjugierten Größe
$ x , \underline{x} $...	Absoluter Wert skalarer und komplexer Zahlen
$ \vec{x} , \underline{\vec{x}} $...	Absoluter Wert skalarer und komplexer Vektoren
x	Skalare Größe
∇	Nabla-Operator, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^\top$ in kart. Koordinaten
\in	Elementzeichen
∂	Operator der partiellen Ableitung

Griechische Buchstaben

Notation	Beschreibung	Einheit
α	Abstandsverhältnis, $\alpha = d_{c2c}/l_{\text{diag,max}}$	
β	Expansionskoeffizient für quasistatische Näherungen	
Δ	LAPLACE-Operator, $\Delta\Theta = \text{div grad } \Theta$	
δ	Eindringtiefe	[m]
ε_{Rel}	Relativer Fehler	
ε_{Ω}	Restfehler bei der numerischen Integration	
ε_0	Permittivität des Freiraums, $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$	[F m ⁻¹]
$\varepsilon_r, \underline{\varepsilon}_r$	Relative Permittivität	
η_{Max}	Maximaler Wirkungsgrad	[%]
$\underline{\Theta}_I$	Magnetische Durchflutung	[A]
Θ	Beliebiges Skalarfeld	
κ	Elektrische Leitfähigkeit	[S m ⁻¹]
λ	Wellenlänge	[m]
λ_{char}	Charakteristische Wellenlänge für quasistatische Näherungen	
μ_0	Permeabilität des Freiraums, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$	[H m ⁻¹]
$\mu_r, \underline{\mu}_r$	Relative Permeabilität	
\mathbf{v}	Vektor der Gewichte der numerischen Integration	
ν	Quadraturgewicht	
$\sigma, \underline{\sigma}$	Oberflächenladungsdichte und komplexe Amplitude	[C m ⁻²]
$\varrho, \underline{\varrho}$	Ladungsdichte und komplexe Amplitude	[C m ⁻³]
$\varrho^C, \underline{\varrho}^C$..	Leitungsladungsdichte	[C m ⁻³]
ρ, φ, z ...	Zylinderkoordinaten	[m,rad,rad]
ρ, φ, θ ...	Kugelkoordinaten	[m,rad,rad]
$\Phi, \underline{\Phi}$	Elektrisches Skalarpotential und komplexe Amplitude	[V]
$\Phi^C, \underline{\Phi}^C$...	Elektrisches Skalarpotential, Leitungsströme	[V]
$\Phi^P, \underline{\Phi}^P$...	Elektrisches Skalarpotential, Polarisation	[V]
$\underline{\varphi}$	Komplexer Potentialvektor	[V]
χ	Skin-Faktor	
Ω	Beliebiges Integrationsgebiet in \mathbb{R}^3	
ω	Winkelfrequenz, $\omega = 2\pi f$	[s ⁻¹]

Römische Buchstaben

Notation	Beschreibung	Einheit
$\mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \dots$	Inzidenzmatrizen	
$\vec{A}, \underline{\vec{A}} \dots \dots$	Magnetisches Vektorpotential und komplexe Amplitude	$[\text{Vs m}^{-1}]$
$\vec{A}^{\text{C}}, \underline{\vec{A}}^{\text{C}} \dots$	Magnetisches Vektorpotential, Leitungsströme	$[\text{Vs m}^{-1}]$
$\vec{A}^{\text{M}}, \underline{\vec{A}}^{\text{M}} \dots$	Magnetisches Vektorpotential, Magnetisierung	$[\text{Vs m}^{-1}]$
$\vec{A}^{\text{p}}, \underline{\vec{A}}^{\text{p}} \dots$	Magnetisches Vektorpotential, Polarisation	$[\text{Vs m}^{-1}]$
$\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{K}$	Inzidenzen	
$A \dots \dots \dots$	Flächeninhalt in \mathbb{R}^3	$[\text{m}^2]$
$a, b, c \dots \dots$	Koordinaten eines schiefwinkligen Koordinatensystems	
$\vec{B}, \underline{\vec{B}} \dots \dots$	Magnetische Flussdichte und komplexe Amplitude	$[\text{Vs m}^{-2}]$
$\mathbf{C}_{\text{s}} \dots \dots \dots$	Vollbesetzte Matrix der Kurzschlusskapazitäten	$[\text{F}]$
$C \dots \dots \dots$	Kapazität	$[\text{F}]$
$c_0 \dots \dots \dots$	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$	$[\text{m s}^{-1}]$
$\vec{D}, \underline{\vec{D}} \dots \dots$	Elektrische Flussdichte und komplexe Amplitude	$[\text{C m}^{-2}]$
$dA, d\vec{A} \dots \dots$	Infinitesimales Querschnittsflächenelement, Skalar und Vektor	
$dS, d\vec{S} \dots \dots$	Infinitesimales Oberflächenelement, Skalar und Vektor	
$ds, d\vec{s} \dots \dots$	Infinitesimales Wegelement, Skalar und Vektor	
$dV \dots \dots \dots$	Infinitesimales Volumenelement	
$d_{\text{c2c}} \dots \dots \dots$	Abstand der Mittelpunkte zweier Zellen	$[\text{m}]$
$\text{div} \dots \dots \dots$	Divergenz-Operator, $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$	
$\vec{E}, \underline{\vec{E}} \dots \dots \dots$	Elektrische Feldstärke und komplexe Amplitude	$[\text{Vm}^{-1}]$
$\vec{e}_{\vec{r}-\vec{r}'} \dots \dots \dots$	Einheitsvektor in \mathbb{R}^3 in $(\vec{r} - \vec{r}')$ -Richtung	
$\vec{e} \dots \dots \dots$	Einheitsvektor in \mathbb{R}^3	
$e \dots \dots \dots$	Exaktheitsgrad der numerischen Integration	
$\vec{F} \dots \dots \dots$	Beliebiges Vektorfeld	
$F \dots \dots \dots$	Lösungen der numerischen Integration	
$\mathbf{f} \dots \dots \dots$	Vektor der Funktionswerte der numerischen Integration	
$f \dots \dots \dots$	Frequenz	$[\text{Hz}]$
$\text{grad} \dots \dots \dots$	Gradient-Operator, $\text{grad } \Theta = \nabla \Theta$	
$\vec{H}, \underline{\vec{H}} \dots \dots \dots$	Magnetische Feldstärke und komplexe Amplitude	$[\text{Am}^{-1}]$
$\Delta h_{\text{S,P}} \dots \dots \dots$	Höhendifferenz einer Spule gegenüber einer Platte	$[\text{m}]$
$\Delta h \dots \dots \dots$	Höhendifferenz in \mathbb{R}^3	$[\text{m}]$
$h_i \dots \dots \dots$	Metrikfaktoren, $i = a, b, c$	$[\text{m}]$
$h_{\text{Tor}} \dots \dots \dots$	Länge eines Tors einer Spule	$[\text{m}]$

Notation	Beschreibung	Einheit
h	Höhe in \mathbb{R}^3	[m]
I, \underline{I}	Strom und komplexe Amplitude	[A]
\underline{I}^C	Leitungsstrom	[A]
$\underline{I}_{\text{Tor}}$	Torstrom	[A]
\underline{I}^{M0}	Anregung der Oberflächenintegraldarstellung	[A]
\underline{I}^M	Magnetisierungsstrom	[A]
$\underline{\mathbf{i}}$	Komplexer Stromvektor	[A]
$\underline{\mathbf{i}}_{p0}, \underline{\mathbf{i}}_{p0}$..	Anregungsvektor der Oberflächenintegraldarstellung	[A]
i	Index, $i \in \mathbb{N}$	
q	Index, $q \in \mathbb{N}$	
\vec{J}, \underline{J}	Stromdichte und komplexe Amplitude	[A m ⁻²]
$\vec{J}^C, \underline{J}^C$...	Leitungsstromdichte	[A m ⁻²]
$\vec{J}^K, \underline{J}^K$...	Konvektionsstromdichte	[A m ⁻²]
$\vec{J}^M, \underline{J}^M$..	Magnetisierungsvolumenstromdichte	[A m ⁻²]
j	Imaginäre Einheit, $j = \sqrt{-1}$	
\vec{K}, \underline{K}	Oberflächenstromdichte und komplexe Amplitude	[A m ⁻¹]
$\vec{K}^M, \underline{K}^M$..	Magnetisierungsoberflächenstromdichte	[A m ⁻¹]
K	Anzahl der Dimensionen der numerischen Integration	
k	Wellenzahl $k = \omega/c_0$	[m ⁻¹]
$\underline{\mathbf{L}}$	Vollbesetzte Matrix der partiellen Induktivitäten	[H]
$\tilde{\underline{\mathbf{L}}}$	Modifizierte Matrix der partiellen Induktivitäten	[H]
ΔL_{Ring} ...	Hubinduktivität durch einen Ring aus magnetischem Material	[H]
L, \underline{L}	Induktivität und komplexe Amplitude	[H]
$L^{\mu\kappa}$	Partielles Element der Kopplung μ zu κ	[H]
L_{char}	Charakteristische Länge für quasistatische Näherungen	
l_{Tor}	Höhe eines Tors einer Spule	[m]
l_p	Länge einer Platte	[m]
l_s	Länge einer Spule	[m]
$l_{\text{diag,max}}$..	Maximale Diagonale zweier Zellen	[m]
l	Länge in \mathbb{R}^3	[m]
\vec{M}, \underline{M}	Magnetisierung und komplexe Amplitude	[A m ⁻¹]
\vec{m}_n	n -te Basisfunktion des Stroms	[m ⁻²]
m	Index, $m \in \mathbb{N}$	
N	Anzahl der Stützstellen bei der numerischen Integration	
N_W	Anzahl der Windungen einer Spule	

Notation	Beschreibung	Einheit
N_b	Anzahl der Stromzellen im MagPEEC-System	
N_n	Anzahl der Knoten im MagPEEC-System	
N_p	Anzahl der Oberflächenzellen im MagPEEC-System	
N_R	Anzahl der Elemente entlang des Radius	
N_t	Anzahl der Elemente entlang der Dicke	
N_φ	Anzahl der Elemente entlang des Winkels φ	
N_w	Anzahl der Elemente entlang der Weite	
\vec{n}	Oberflächennormalenvektor in \mathbb{R}^3	
n	Index, $n \in \mathbb{N}$	
\mathcal{O}	LANDAU-Symbol, entspricht der Komplexität des Algorithmus	
\mathbf{P}	Vollbesetzte Matrix der partiellen Potentialkoeffizienten	$[\text{F}^{-1}]$
$\vec{P}, \underline{\vec{P}}$	Elektrische Polarisation und komplexe Amplitude	$[\text{C m}^{-2}]$
P	Potentialkoeffizienten indiziert für Mehrleitersysteme	$[\text{W}]$
\vec{p}_u	u -te Basisfunktion des Oberflächenstroms	$[\text{m}^{-1}]$
\underline{Q}^C	Freie Ladung	$[\text{C}]$
\underline{Q}_L	Gütefaktor	
Q, \underline{Q}	Ladung und komplexe Amplitude	$[\text{C}]$
$\underline{\mathbf{q}}$	Komplexer Ladungsvektor	$[\text{A}]$
\mathbf{R}	Diagonalmatrix der partiellen Widerstände	$[\Omega]$
R	Elektrischer Widerstand	$[\Omega]$
\vec{r}	Positionsvektor in \mathbb{R}^3 , Aufpunkt	$[\text{m}]$
\vec{r}'	Positionsvektor in \mathbb{R}^3 , Quellpunkt	$[\text{m}]$
R_S	Radius eines Leiters einer Spule	$[\text{m}]$
R_1	Innenradius eines Rings	$[\text{m}]$
R_K	Radius einer Kugel	$[\text{m}]$
R_2	Außenradius eines Rings	$[\text{m}]$
rot	Rotations-Operator, $\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$	
s	Genauigkeit	
s_S	Breite zwischen den Leiterbahnen einer Spule	$[\text{m}]$
$\mathbf{T}_{\kappa\mu}$	Vollbesetzte Koppelmatrix κ zu μ	
$\underline{\mathbf{T}}_\mu, \mathbf{T}_\mu$	Vollbesetzte Koppelmatrix der Oberflächenzellen	
T_{Sim}	Gesamte Simulationszeit	$[\text{s}]$
T^μ, \underline{T}^μ	Partielles Element der Kopplung der Oberflächenzellen	
$T^{\kappa\mu}$	Partielles Element der Kopplung κ zu μ	
t_p	Dicke einer Platte	$[\text{m}]$

Notation	Beschreibung	Einheit
t_S	Dicke einer Leiterbahn einer Spule	[m]
$\underline{U}_{\text{Tor}}$	Matrix der Torspannungen	[V]
$\underline{U}_{\text{Tor}}$	Torspannung	[V]
U, \underline{U}	Spannung und komplexe Amplitude	[V]
\underline{u}	Komplexer Spannungsvektor	[V]
u	Index, $u \in \mathbb{N}$	
V	Volumen in \mathbb{R}^3	[m ³]
v_q	n -te Basisfunktion der Ladung	[m ⁻³]
v	Index, $v \in \mathbb{N}$	
w_S	Weite einer Leiterbahn einer Spule	[m]
w	Weite in \mathbb{R}^3	[m]
x, y, z	Kartesische Koordinaten	[m]
$\underline{Z}_{\text{Tor}}$	Matrix der Torimpedanzen	[Ω]
$\underline{Z}_{\text{CM}}$	Impedanz im Gleichtaktbetrieb	[Ω]
$\underline{Z}_{\text{DM}}$	Impedanz im Gegentaktbetrieb	[Ω]
$\underline{Z}_{\text{Tor}}$	Torimpedanz	[Ω]
Z, \underline{Z}	Impedanz	[Ω]

Literaturverzeichnis

- [1] Phoenix Contact GmbH. Online, [Jan. 2011]: www.phoenixcontact.com/online/portal/pc
- [2] R. Coccioli, T. Itoh, G. Pelosi, and P. P. Silvester, "Finite-element methods in microwaves: A selected bibliography," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 38, no. 6, pp. 34–48, Dec. 1996.
- [3] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. Robert E. Krieger Publishing Company Malaba, Florida, 1968.
- [4] C. A. Brebbia and J. Dominguez, "Boundary element methods for potential problems," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 1, no. 7, pp. 372–378, 1977.
- [5] A. E. Ruehli and P. A. Brennan, "Efficient capacitance calculations for three-dimensional multiconductor systems," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 21, no. 2, pp. 76–82, Feb. 1973.
- [6] A. E. Ruehli, G. Antonini, J. Esch, J. Ekman, A. Mayo, and A. Orlandi, "Non-orthogonal PEEC formulation for time- and frequency-domain EM and circuit modeling," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 2, pp. 167–176, May 2003.
- [7] H. Heeb and A. E. Ruehli, "Three-dimensional interconnect analysis using partial element equivalent circuits," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, no. 11, pp. 974–982, Nov. 1992.
- [8] M. Gimignani, A. Musolino, and M. Raugi, "Integral formulation for nonlinear magnetostatic and eddy currents analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 30, no. 5, pp. 3024–3027, Sep. 1994.
- [9] P. Scholz, "Analysis and Numerical Modeling of Inductively Coupled Antenna Systems," Ph.D. dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2010. Online, [Jan. 2011]: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/2354/>

-
- [10] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, and G. Musiol, *Taschenbuch der Mathematik*, 7th ed. Deutsch (Harri), 2008.
- [11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. John Wiley and Sons, 1998.
- [12] P-A. Raviart and E. Sonnendrücker, “A hierarchy of approximate models for the maxwell equations,” *Numerische Mathematik*, vol. 73, no. 3, pp. 329–372, 1996.
- [13] H. K. Dirks, “Quasi-stationary fields for microelectronic applications,” *Electrical Engineering*, vol. 79, no. 2, pp. 145–155, Apr. 1996.
- [14] G. Lehner, *Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker*, 5th ed. Springer, Berlin, 2005.
- [15] F. M. Traub, “Automated construction of equivalent electrical circuit models for electromagnetic components and systems,” Ph.D. dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2014.
- [16] C. G. Darwin, “The dynamical motions of charged particles,” *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 39, pp. 537–551, 1920.
- [17] M. Wilke, “Zur numerischen Berechnung quasistationärer elektromagnetischer Felder im Zeitbereich,” Ph.D. dissertation, Technische Universität Darmstadt, 2004.
- [18] K. Meetz and W. L. Engl, *Elektromagnetische Felder: Mathematische und physikalische Grundlagen*. Springer, Berlin, 1980.
- [19] J. Larsson, “Electromagnetics from a quasistatic perspective,” *Am. J. Phys.*, vol. 75, no. 3, pp. 230–239, Mar. 2007.
- [20] A. E. Ruehli and A. C. Cangellaris, “Progress in the methodologies for the electrical modeling of interconnects and electronic packages,” *Proc. IEEE*, vol. 89, no. 5, pp. 740–771, May 2001.
- [21] G. Antonini and A. E. Ruehli, “Fast multipole and multifunction PEEC methods,” *IEEE Trans. Mobile Comput.*, vol. 2, no. 4, pp. 288–298, Oct.–Dec. 2003.
- [22] M. Kamon, N. A. Marques, L. M. Silveira, and J. White, “Automatic generation of accurate circuit models of 3-d interconnect,” *IEEE Trans. Compon., Packag., Manuf. Technol. B*, vol. 21, no. 3, pp. 225–240, Aug. 1998.

-
- [23] Z. Zhu, B. Song, and J. K. White, "Algorithms in fastimp: A fast and wide-band impedance extraction program for complicated 3-d geometries," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 24, no. 7, pp. 981–998, Jul. 2005.
- [24] G. C. Hsiao and R. E. Kleinman, "Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 3, pp. 316–328, 1997.
- [25] D. Sievers, "Anwendung finiter Gruppen zur effizienten Berechnung elektromagnetischer Felder in symmetrischen Strukturen auf Basis der Randelementmethode," Ph.D. dissertation, TU Darmstadt, Apr. 2008. Online, [Jan. 2011]: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/967/>
- [26] M. H. Lean and D. S. Bloomberg, "Nonlinear boundary element method for two dimensional magnetostatics," *Journal of Applied Physics*, vol. 55, no. 6, pp. 2195–2197, 1984. Online, [Jan. 2011]: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jap/55/6/10.1063/1.333608>
- [27] A. Nicolet, "Boundary elements and singular integrals in 3d magnetostatics," *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 13, no. 2, pp. 193–200, 1994.
- [28] I. Fredholm, "Sur une classe d'équations fonctionnelles," *Acta Mathematica*, vol. 27, no. 1, pp. 365–390, 1903.
- [29] G. Antonini, M. Sabatini, and G. Miscione, "PEEC modeling of linear magnetic materials," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility (EMC'06)*, vol. 1, 2006, pp. 93–98.
- [30] G. Antonini and D. Romano, "Acceleration of time-domain nodal-analysis of partial element equivalent circuits through multiscale compressed decomposition," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 56, no. 4, pp. 970–979, Aug 2014.
- [31] D. Romano and G. Antonini, "Quasi-static partial element equivalent circuit models of linear magnetic materials," *IEEE Trans. Magn.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2014.
- [32] A. E. Ruehli, "Inductance calculations in a complex integrated circuit environment," *IBM J. Res.Dev.*, vol. 16, no. 1, pp. 470–481, Sep. 1972.

-
- [33] —, “Equivalent circuit models for three-dimensional multiconductor systems,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. MTT-22, no. 3, pp. 216–221, Mar. 1974.
- [34] A. E. Ruehli and H. Heeb, “Circuit models for three-dimensional geometries including dielectrics,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 40, no. 7, pp. 1507–1516, Jul. 1992.
- [35] E. Hoene, A. Lissner, S. Weber, S. Guttowski, W. John, and H. Reichl, “Simulating electromagnetic interactions in high power density inverters,” in *Power Electronics Specialists Conference, 2005. PESC’05. IEEE 36th.* IEEE, 2005, pp. 1665–1670.
- [36] T. De-Oliveira, J.-L. Schanen, J.-M. Guichon, and L. Gerbaud, “Optimal stray magnetic couplings for emc filters,” *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 49, no. 4, pp. 1619–1627, 2013.
- [37] T.-S. Tran, G. Meunier, P. Labie, and J. Aime, “Comparison of FEM-PEEC coupled method and finite-element method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 4, pp. 996–999, 2010.
- [38] D. Romano, G. Antonini, and A. Ruehli, “Time-domain partial element equivalent circuit solver including non-linear magnetic materials,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2016.
- [39] O. Chadebec, J. L. Coulomb, and F. Janet, “A review of magnetostatic moment method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 4, pp. 515–520, Apr. 2006.
- [40] T. Le-Duc, O. Chadebec, J.-M. Guichon, G. Meunier, and Y. Lembeey, “Coupling between peec and magnetic moment method,” *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 32, no. 1, pp. 383–395, 2012.
- [41] G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, “A magnetic flux-electric current volume integral formulation based on facet elements for solving electromagnetic problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, March 2015.
- [42] Y. M. Massoud, “Simulation algorithms for inductive effects,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, september 1999.

-
- [43] Y. Massoud, J. Wang, and J. White, “Accurate inductance extraction with permeable materials using qualocation,” in *Proceedings of the International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*. Citeseer, 1999.
- [44] Y. Massoud and J. White, “Fastmag: a 3-d magnetostatic inductance extraction program for structures with permeable materials,” in *Computer Aided Design, 2002. ICCAD 2002. IEEE/ACM International Conference*, Nov 2002, pp. 478–484.
- [45] —, “Improving the generality of the fictitious magnetic charge approach to computing inductances in the presence of permeable materials,” in *Design Automation Conference, 2002. Proceedings. 39th*, 2002, pp. 552–555.
- [46] A. Bucher, “Resonante Konverter höherer Ordnung für die kontaktlose induktive Energieübertragung,” Ph.D. dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, June 2014.
- [47] J.-P. Keradec, E. Clavel, J.-P. Gonnet, and V. Mazauric, “Introducing linear magnetic materials in PEEC simulations. Principles, academic and industrial applications,” in *Proc. Industry Applications Conf.*, vol. 3, Oct. 2005, pp. 2236–2240.
- [48] H. Bui-Ngoc, H. Chazal, Y. Lembeye, J.-P. Keradec, and J.-L. Schanen, “New μ peec formulation for modeling 2d core transformer. Principles, academic and industrial applications,” in *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2013 Twenty-Eighth Annual IEEE*, Mar. 2013, pp. 553–558.
- [49] H. Long, Z. Fengl, H. Feng, A. Wang, and T. Ren, “magPEEC: Extended PEEC modeling for 3-d arbitrary electro-magnetic devices with application for M-cored inductors,” in *Proc. IEEE Int. Symp. on Radio Frequency Integrated Circuits (RFIC)*, Jun. 2003, pp. 251–254.
- [50] H. Long, Z. Feng, H. Feng, A. Wang, T. Ren, J. Bao, F. Liu, C. Yang, and X. Zhang, “A new modeling technique for simulating 3-d arbitrary conductor-magnet structures for RFIC applications,” *IEEE Trans. Electron Devices*, vol. 52, no. 7, pp. 1354–1363, Jul. 2005.
- [51] I. Kovacevic, T. Friedli, A. Muesing, and J. Kolar, “Full peec modeling of emi filter inductors in the frequency domain,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 10, pp. 5248–5256, 2013.

-
- [52] I. F. Kovacevic, A. M. Muesing, and J. W. Kolar, "An extension of PEEC method for magnetic materials modeling in frequency domain," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no. 5, pp. 910–913, May 2011.
- [53] I. Kovacevic, T. Friedli, A. Muesing, and J. Kolar, "3-d electromagnetic modeling of emi input filters," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, no. 1, pp. 231–242, 2014.
- [54] M. E. Verbeek, "Partial element equivalent circuit (PEEC) models for on-chip passives and interconnects," *Int. J. Numer. Modell. Electron. Networks Devices Fields*, vol. 17, no. 1, pp. 61–84, Jan. 2004.
- [55] J. Garrett, A. E. Ruehli, and C. Paul, "Recent improvements in PEEC modeling accuracy," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility*. IEEE, Aug. 1997, pp. 347–352.
- [56] A. Rong and A. C. Cangellaris, "Generalized PEEC models for three-dimensional interconnect structures and integrated passives of arbitrary shapes," in *Electrical Performance of Electronic Packaging*, Oct. 2001, pp. 225–228.
- [57] V. Jandhyala, Y. Wang, D. Gope, and R. Shi, "Coupled electromagnetic-circuit simulation of arbitrarily-shaped conducting structures using triangular meshes," in *Int. Symp. on Quality Electronic Design*, 2002, pp. 38–42.
- [58] S. V. Kochetov, "Time- and frequency-domain modeling of passive interconnection structures in field and circuit analysis," Ph.D. dissertation, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Sep. 2008. Online, [Jan. 2011]: <http://diglib.uni-magdeburg.de/Dissertationen/2008/serkochetov.htm>
- [59] X. Hu, "Full-wave analysis of large conductor systems over substrate," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Jan. 2006. Online, [Jan. 2011]: <http://hdl.handle.net/1721.1/35597>
- [60] P. Balaban, "Calculation of the capacitance coefficients of planar conductors on a dielectric surface," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 20, no. 6, pp. 725–731, Nov. 1973.
- [61] V. Vahrenholt, H.-D. Brüns, and H. Singer, "Razor blade functions in the PEEC method," in *Proc. IEEE Int. Symp. on Electromagnetic Compatibility (EMC'07)*, Jul. 9–13, 2007, pp. 1–6.

-
- [62] T. Weiland, "Eine Methode zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis," *Electronics and Communication (AEÜ)*, vol. 31, no. 3, pp. 116–120, Mar. 1977.
- [63] L.-P. Schmidt, G. Schaller, and S. Martius, *Grundlagen der Elektrotechnik 3 – Netzwerke*, 1st ed. Pearson Studium, 2006, vol. 3.
- [64] A. L. Zitzmann, "Fast and efficient methods for circuit-based automotive EMC simulation," Ph.D. dissertation, University of Erlangen-Nürnberg, 2007. Online, [Jan. 2011]: <http://www.opus.ub.uni-erlangen.de/opus/volltexte/2007/544/>
- [65] C.-W. Ho, A. E. Ruehli, and P. A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 22, no. 6, pp. 504–509, Jun. 1975.
- [66] M. Kamon, "Fast parasitic extraction and simulation of three-dimensional interconnect via quasistatic analysis," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Feb. 1998. Online, [Jan. 2011]: <http://hdl.handle.net/1721.1/10048>
- [67] A. Müsing, C. Zingerli, P. Imoberdorf, and J. W. Kolar, "PEEC-based numerical optimization of compact radial position sensors for active magnetic bearings," in *5th Int. Conf. on Integrated Power Electronics Systems*, Mar. 2008.
- [68] D. Gope, A. E. Ruehli, C. Yang, and V. Jandhyala, "(S)PEEC: time- and frequency-domain surface formulation for modeling conductors and dielectrics in combined circuit electromagnetic simulations," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 54, no. 6, pp. 2453–2464, Jun. 2006.
- [69] C.-T. Tai, *General Vector and Dyadic Analysis: Applied Mathematics in Field Theory*, 2nd ed., ser. IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory. Wiley-IEEE Press, Apr. 1997.
- [70] M. A. Cracraft, "Mobile array designs with ANSERLIN antennas and efficient, wide-band PEEC models for interconnect and power distribution network analysis," Ph.D. dissertation, University of Missouri-Rolla, 2007. Online, [Jan. 2011]: <http://hdl.handle.net/10355/29582>
- [71] H. Wang, "Modeling multi-layer via structure using peec method," Ph.D. dissertation, Missouri University of Science and Technology, 2012. Online, [Jan. 2011]: <http://books.google.de/books?id=GMsRnQEACAAJ>

-
- [72] H. Wang and J. Fan, "Modeling local via structures using innovative peec formulation based on cavity green's functions with wave port excitation," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 61, no. 5, pp. 1748–1757, May 2013.
- [73] A. Müsing and J. Kolar, "Efficient partial element calculation and the extension to cylindrical elements for the PEEC method," in *Control and Modeling for Power Electronics, 2008. COMPEL 2008. 11th Workshop on*, 2008, pp. 1–6.
- [74] A. Müsing, J. Ekman, and J. W. Kolar, "Efficient calculation of non-orthogonal partial elements for the PEEC method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1140–1143, Mar. 2009.
- [75] P. Scholz, W. Ackermann, and T. Weiland, "PEEC antenna modeling of rectangular spiral inductors for RFID systems," *COMPEL*, vol. 29, no. 6, pp. 1453–1463, Dec. 2010.
- [76] S. Sauter and C. Schwab, *Randelementmethoden: Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Vieweg+ Teubner Verlag, 2004.
- [77] V. I. Krylov and A. H. Stroud, *Approximate calculation of integrals*. Courier Corporation, 2006.
- [78] I. Babuska, B. Szabo, and I. Katz, "The p-version of the finite element method," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 18, no. 3, pp. 515–545, 1981. Online, [Jan. 2011]: <http://dx.doi.org/10.1137/0718033>
- [79] P. Gonnet, *Adaptive quadrature re-revisited*. Lulu. com, 2009.
- [80] F. Heiss and V. Winschel, "Likelihood approximation by numerical integration on sparse grids," *Journal of Econometrics*, vol. 144, no. 1, pp. 62–80, 2008.
- [81] B. Hu Li, T. Xiao, L. Zhang, and M. Fabbri, "Magnetic flux density and vector potential of linear polyhedral sources," *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 28, no. 6, pp. 1688–1700, 2009.
- [82] F. W. Grover, *Inductance Calculations*. D. Van Nostrand Co., New York, 1946; reprinted by Dover Publications, New York, 2004.
- [83] P. D. Patel, "Calculation of capacitance coefficients for a system of irregular finite conductors on a dielectric sheet," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 19, no. 11, pp. 862–869, Nov. 1971.

-
- [84] R. Bancroft, "A note on the moment method solution for the capacitance of a conducting flat plate," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 45, no. 11, p. 1704, Nov. 1997.
- [85] J. D. Hanson and S. P. Hirshman, "Compact expressions for the biot savart fields of a filamentary segment," *Physics of Plasmas (1994-present)*, vol. 9, no. 10, pp. 4410–4412, 2002. Online, [Jan. 2011]: <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/9/10/10.1063/1.1507589>
- [86] F. Bellina and E. Serra, "Computation of the magnetostatic field by means of a mixed analytical-numerical procedure," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 2, pp. 834–837, Mar. 2004.
- [87] P. Scholz, W. Ackermann, and T. Weiland, "Derivatives of partial inductances for the sensitivity analysis in PEEC systems," in *Proc. 2010 URSI Int. Symp. on Electromagnetic Theory (EMTS)*, Aug. 2010, pp. 48–51.
- [88] SALOME - The Open Source Integration Platform for Numerical Simulaion, OPEN CASCADE SAS (EURIWARE group) Headquarters, 1 place des frères Montgolfier, 78280 Guyancourt, France. Online, [Jan. 2011]: <http://www.salome-platform.org>
- [89] K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, 13th ed. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [90] A. Görisch, "Netzwerkorientierte Modellierung und Simulation elektrischer Verbindungsstrukturen mit der Methode der partiellen Elemente," Ph.D. dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2002.
- [91] K. M. Coperich, A. E. Ruehli, and A. Cangellaris, "Enhanced skin effect for partial-element equivalent-circuit (PEEC) models," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 48, no. 9, pp. 1435–1442, Sep. 2000.
- [92] M. Ouda and A. Sebak, "Efficient method for frequency dependent inductance and resistance calculations," in *Proc. IEEE WESCANEX Communications, Power and Computing Conf.*, vol. 2, May 1995, pp. 473–477.
- [93] K.-L. Krieger, "Integriertes Energie- und Datenübertragungssystem, Modellbildung und Systemorientierte Optimierung von Monolithisch Integrierten Mikrosulen," Ph.D. dissertation, Universität Bremen, 1999.

-
- [94] P. A. Brennan, N. Raver, and A. E. Ruehli, "Three-dimensional inductance computations with partial element equivalent circuits," *IBM J. Res. Dev.*, vol. 23, pp. 661–668, Nov. 1979.
- [95] J. Mühlenthaler, "Optimal design of inductive components based on accurate loss and thermal models," in *Gecko Simulations*, 2013.
- [96] T. Morisue, "3-d magnetostatic field calculation for a magnetic circuit with no (a narrow) air gap," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 25, no. 5, pp. 3266–3268, Sep 1989.
- [97] W. Hafla, A. Buchau, and W. M. Rucker, "Accuracy improvement in nonlinear magnetostatic field computations with integral equation methods and indirect total scalar potential formulations," *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 25, no. 3, pp. 565–571, 2006. Online, [Jan. 2011]: <http://dx.doi.org/10.1108/03321640610666718>
- [98] D.-X. Chen, J. A. Brug, and R. B. Goldfarb, "Demagnetizing factors for cylinders," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, no. 4, pp. 3601–3619, 1991.
- [99] W. L. Wendland, *Mathematics of Finite Elements and Applications: On some mathematical aspects of boundary element methods for elliptic problems*, J. Whiteman, Ed. London: Academic Press, 1985.
- [100] CST - Computer Simulation Technology AG, Bad Nauheimer Str. 19, D-64289 Darmstadt, Germany. Online, [Jan. 2011]: <http://www.cst.com>
- [101] B. Willmann, O. Assi, and R. Vick, "Simulationsbasierte Untersuchung der Einflussfaktoren auf die magnetischen Streufelder bei induktiven Ladesystemen von Elektrofahrzeugen," in *EMV - Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit*. Apprimus Verlag, Aachen, 2016, pp. 455–462.
- [102] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, 4th ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2012.
- [103] A. M. Niknejad, "Analysis, simulation, and applications of passive devices on conductive substrates," Ph.D. dissertation, University of California at Berkeley, 2000. Online, [Jan. 2011]: <http://www.eecs.berkeley.edu/~niknejad/pdf/NiknejadPhD.pdf>
- [104] D. Meeker, "FEMM – Finite Element Method Magnetics." Online, [Jan. 2011]: <http://www.femm.info>

-
- [105] P. Scholz, "Planarer eigensicherer Übertrager mit Schichtaufbau," Dec. 18 2014, dE Patent 102,012,003,365. Online, [Jan. 2011]: <http://google.com/patents/DE102012003365B4?cl=fr>
- [106] M. J. Bueker, C. Reinhold, P. Scholz, U. Hilleringmann, T. Mager, and C. Hedayat, "Efficiency and field emission improvements of wireless energy transfer systems," in *Proc. 12th Sophia Antipolis MicroElectronics Conf. (SAME 2009)*, Sep. 2009. Online, [Jan. 2011]: http://same-conference.org/same_2009/documents/Demo_u_Booth/Demo_8.pdf
- [107] P. Wambsganß and D. Huwig, "A new figure of merit and general properties of wireless power transmission systems," 2014. Online, [Jan. 2011]: http://www.etatronix.de/wp-content/uploads/2014/12/etatronix_paper_2014.pdf
- [108] Agilent Technologies, *4294A Precision Impedance Analyzer, 40 Hz to 110 MHz*. Online, [Jan. 2011]: <http://cp.literature.agilent.com/litweb/pdf/5968-3809E.pdf>
- [109] G. Antonini, "Fast multipole method for time domain PEEC analysis," *IEEE Trans. Mobile Comput.*, vol. 2, no. 4, pp. 275–287, Oct. – Dec. 2003.
- [110] R. Escovar, S. Ortiz, and R. Suaya, "An improved long distance treatment for mutual inductance," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 24, no. 5, pp. 783–793, May 2005.
- [111] K. Nabors and J. White, "Multipole-accelerated capacitance extraction algorithms for 3-d structures with multiple dielectrics," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 39, no. 11, pp. 946–954, Nov. 1992.
- [112] J. R. Phillips and J. K. White, "A precorrected-FFT method for electrostatic analysis of complicated 3-d structures," *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.*, vol. 16, no. 10, pp. 1059–1072, Oct. 1997.
- [113] J. R. Phillips, "Rapid solution of potential integral equations in complicated 3-dimensional geometries," Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Jun. 1997. Online, [Jan. 2011]: <http://hdl.handle.net/1721.1/43400>
- [114] W. Hackbusch, "A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. part 2: Application to multi-dimensional problems," *Computing*, vol. 62, no. 2, pp. 89–108, 1999.

-
- [115] M. Bebendorf, C. Kuske, and R. Venn, "Wideband nested cross approximation for Helmholtz problems," *Numerische Mathematik*, vol. 130, no. 1, pp. 1–34, 2015.
- [116] G. Antonini and D. Romano, "Adaptive-cross-approximation-based acceleration of transient analysis of quasi-static partial element equivalent circuits," *Microwaves, Antennas & Propagation, IET*, vol. 9, no. 7, pp. 700–709, 2015.
- [117] F. F. Martens, "Über die gegenseitige Induktion und ponderomotorische Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Rechtecken," *Annalen der Physik*, vol. 334, no. 10, pp. 959–970, 1909.
- [118] G. Zhong and C.-K. Koh, "Exact closed-form formula for partial mutual inductances of rectangular conductors," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 50, no. 10, pp. 1349–1352, Oct. 2003.
- [119] C. Hoer and C. Love, "Exact inductance equations for rectangular conductors with applications to more complicated geometries," *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, vol. 69C, no. 2, pp. 127–137, Jan. 1965.
- [120] J.-T. Kuo and K.-Y. Su, "Analytical evaluation of the MoM matrix elements for the capacitance of a charged plate," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 50, no. 5, pp. 1435–1436, May 2002.
- [121] G. Antonini, A. Orlandi, and A. Ruehli, "Analytical integration of quasi-static potential integrals on nonorthogonal coplanar quadrilaterals for the peec method," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 44, no. 2, pp. 399–403, May 2002.

Liste der Publikationen

- [122] Y. Hackl, P. Scholz, W. Ackermann, and T. Weiland, “New Numerical Integration Routine for the Nonorthogonal PEEC Approach,” in *Proc. 20th Conf. on the Computation of Electromagnetic Fields (Compumag 2015)*, 2015. [Online]. Available: <http://tubiblio.ulb.tu-darmstadt.de/79400/>
- [123] —, “Multifunction Approach and Specialized Numerical Integration Algorithms for Fast Inductance Evaluations in Nonorthogonal PEEC Systems,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 57, no. 5, pp. 1155–1163, 2015.
- [124] Y. Hackl, P. Scholz, G. Finis, and C. Depping, “Simulatorische Optimierung von Leiterstrukturen in Hochstromprüfanlagen,” in *EMV - Internationale Fachmesse und Kongress für Elektromagnetische Verträglichkeit*. Apprimus Verlag, Aachen, 2016, pp. 463–470.
- [125] Y. Hackl, P. Scholz, W. Ackermann, and T. Weiland, “Die MagPEEC-Methode in der Magnetoquasistatik,” in *Kleinheubacher Tagung 2016 (KH2016)*, Miltenberg, Germany, Sep. 2016.
- [126] —, “Efficient Simulation of Magnetic Components Using the MagPEEC-Method,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 3, pp. 1–9, March 2017.



Danksagung

Ich möchte allen Personen danken, die direkt und indirekt zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Insbesondere gilt mein Dank:

- Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Weiland für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit.
- Herrn Prof. Dr.-Ing. Albert E. Ruehli für die freundliche Übernahme des Korreferats.
- Herrn Dr.-Ing. Wolfgang Ackermann für die fachliche Betreuung der Arbeit und die Durchsicht des Manuskriptes.
- Herrn Dr.-Ing. Peter Scholz für die fachliche Betreuung der Arbeit, den konstruktiven Fachgesprächen und der freundschaftlichen Zusammenarbeit.
- Der Firma PHOENIX CONTACT Electronics GmbH für das Bereitstellen der ausgezeichneten Arbeitsumgebung und im speziellen der Entwicklungsgruppe der Technologieentwicklung im Bereich Interface für die freundschaftliche und kollegiale Zusammenarbeit sowie für die stets angenehme Arbeitsatmosphäre.
- Frau Sara Beckmann für die sprachliche Korrektur des Manuskripts.
- Allen jetzigen und ehemaligen Kollegen des Institutes TEMF der Technischen Universität Darmstadt und der Entwicklung im Bereich Interface der Firma PHOENIX CONTACT Electronics GmbH
- dem Kuratorim der PHOENIX CONTACT Stiftung für die Finanzierung der wissenschaftlichen Arbeit.

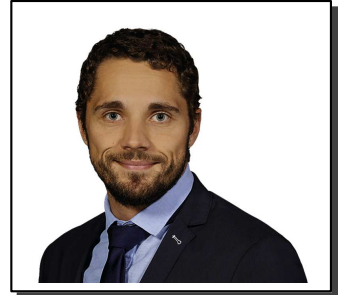
Meiner Freundin Johanna, meinen Eltern Thomas und Katrin Hackl sowie meiner ganzen Familie danke ich für die große Unterstützung und den Rückhalt in den vergangenen Jahren. Danke!



Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name: Yves Hackl
Geburtsdatum: 11.11.1987
Geburtsort: Dresden



Ausbildung / Werdegang

06/2013 – heute	Externer Promotionsstudent am Institut für Theorie elektromagnetischer Felder der Technischen Universität Darmstadt und bei der Firma PHOENIX CONTACT Electronics GmbH, Bad Pyrmont
10/2011 – 03/2013	Masterstudiengang Elektrotechnik an der Technischen Universität Braunschweig, Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik und Physik Abschlussarbeit zum Thema: Elektronenstrahlolithographische Präparation von Mikroelektroden für elektrochemische Untersuchungsmethoden
10/2008 – 10/2011	Bachelorstudiengang Elektrotechnik an der Technischen Universität Braunschweig, Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik und Physik Abschlussarbeit zum Thema: Bestimmung der Güte resonanter und verkoppelter Prüflinge
10/2007 – 09/2008	Fernstudium/Teilzeit an der TU Kaiserslautern während des Zivildienstes Mathe/Physik
07/2007 – 03/2008	Zivildienst im Kreiskrankenhaus Hameln
09/2000 – 06/2007	Viktoria Luise Gymnasium in Hameln



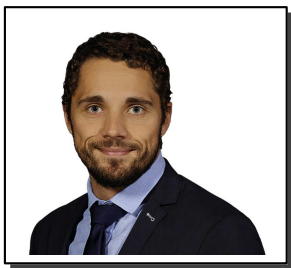


Um mit der anhaltenden Miniaturisierung der Elektronik Schritt zu halten, werden die Methoden der numerischen Simulation elektromagnetischer Felder stetig weiterentwickelt und verbessert. Im Zuge dieser Entwicklungen entstand diese Dissertation, welche einen speziellen Ansatz für die Modellierung magnetischer, passiver Bauteile vorstellt und diskutiert.

Es wird die Methode der partiellen Elemente (*engl. Partial Element Equivalent Circuit Method* – PEEC-Methode), die ursprünglich für die schnelle Berechnung von Koppeleffekten von elektrischen Leiterstrukturen entwickelt wurde, um die Berücksichtigung linearer, magnetischer Materialien erweitert, wobei die Schwerpunkte auf die Flexibilität der Gitterstrukturen, der Effizienz der Algorithmen und der konsistenten Herleitung der zu Grunde liegenden Gleichungen herausgearbeitet sind.

Der grundlegende Ansatz ist die Beschreibung des physikalischen Verhaltens der magnetischen Materialien mittels einer Oberflächenformulierung, welche direkt durch die niederfrequente Approximation der Maxwell'schen Gleichungen und der Einschränkung auf lineare, isotrope und homogene magnetische Materialien resultiert.

Die entwickelte und implementierte Methode für die Simulation der magnetischen Bauteile wird anhand akademischer sowie praktisch relevanter Beispiele evaluiert.



Yves Hackl, M. Sc.

hat im März 2013 sein Studium der Elektrotechnik an der TU Braunschweig mit dem Mastertitel abgeschlossen. Seither arbeitet er am Institut für Theorie elektromagnetische Felder an der TU Darmstadt in Kooperation mit der Fa. PHOENIX CONTACT Electronics GmbH an seiner Dissertation.
